

SESSION 2012

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : SCIENCES PHYSIQUES
Option A : PHYSIQUE**

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

AVERTISSEMENT.

Il sera tenu le plus grand compte de la clarté, de la rédaction, de l'homogénéité dans les formules et des applications numériques. Les réponses aux questions qualitatives doivent être succinctes mais précises. Lorsqu'il est demandé la description d'une expérience, il s'agit de représenter par un schéma le dispositif utilisé, d'indiquer ce que fait l'expérimentateur ; ce qu'il observe et les conclusions qu'il tire de ses observations.

Valeurs numériques utiles :

Données relatives à l'eau à 15°C :

Viscosité dynamique : $\eta_e = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ g.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}$

Données relatives à l'air à P = 1,0 bar, et T = 300K

Viscosité dynamique : $\eta_a = 1,85 \cdot 10^{-4} \text{ g.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}$

Viscosité cinématique : $\nu_a = 0,14 \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$

Conductivité thermique : $\lambda_a = 2,60 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

L'air est considéré comme un gaz parfait pour lequel $\gamma_a = 1,4$; $M_a = 29 \text{ g. mol}^{-1}$.

On rappelle les valeurs de la constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J. K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, et du champ de pesanteur $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Formulaire :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\vec{a})) = \overline{\text{grad}}(\text{div } \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

$$\text{div}(f \vec{a}) = \overline{\text{grad}} f \cdot \vec{a} + f \text{div } \vec{a}$$

$$\overline{\text{rot}}(f \vec{a}) = f \overline{\text{rot}} \vec{a} + \overline{\text{grad}} f \wedge \vec{a}$$

en coordonnées cylindriques :

Pour $\vec{a} = f(r, \theta, z) \vec{e}_z$, on a :

$$\overline{\text{rot}} \vec{a} = \overline{\text{grad}} f \wedge \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_r - \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_\theta$$

en coordonnées sphériques :

$$\overline{\text{rot}} \vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta a_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r \sin \theta a_\phi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix}$$

Propriétés de la « fonction erreur » :

Définition : $\text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-x^2} dx$

quand $u \rightarrow \infty$, $\text{erf}(u) \rightarrow 1$

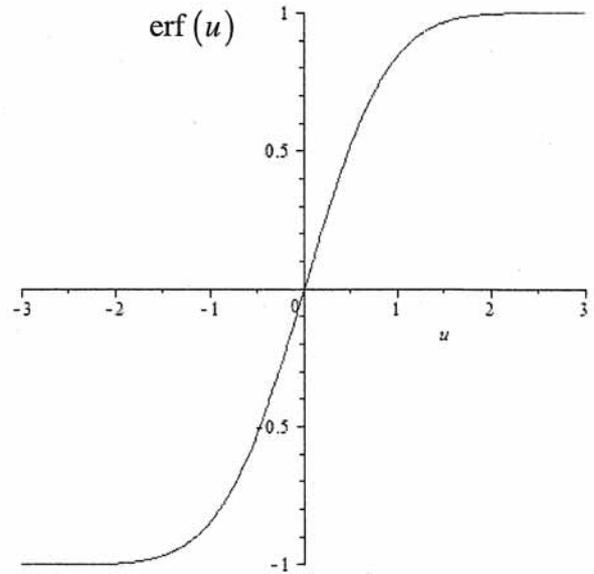


Figure 1 : représentation graphique .

Introduction

Comment les objets « plus lourds que l'air » peuvent-ils voler ? C'est une très ancienne interrogation de l'homme.

Fondamentalement, qu'il s'agisse d'un aéronef ou d'un animal volant, l'objectif est le même : rester en l'air et avancer. Comment y parvenir ?

Si les principes de physique sont simples, la réalisation est beaucoup plus difficile. La conception d'un avion doit satisfaire, a priori, à des exigences très diverses : assurer une force de sustentation (dite de portance) donnée tout en minimisant la résistance à l'avancement (force dite de traînée) en vitesse de croisière.

Dans une première partie, on rappelle des éléments de cinématique des fluides, puis on met en évidence l'importance de la circulation du champ de vitesse dans la portance d'une aile d'avion dans la partie II. Dans la dernière partie, on s'intéresse à la traînée, d'abord à petit nombre de Reynolds, puis on introduit le modèle de la couche limite permettant d'exprimer la traînée due aux frottements. Enfin on discute de l'importance des coefficients de portance et de traînée, et d'un modèle historique de Newton de recherche de surface de moindre résistance à l'avancement.

I) Analyse préliminaire.

A - Le concept de particule de fluide.

- 1) Préciser le concept de particule de fluide en rappelant ce qui fixe l'échelle mésoscopique et donner des ordres de grandeur des longueurs caractéristiques des différentes échelles.
- 2) Le mouvement d'un fluide peut être décrit selon les points de vue eulerien ou lagrangien. Caractériser chacune de ces descriptions.
- 3) Définir les notions de
 - lignes de courant,
 - trajectoire particulaire,
 - ligne d'émission,en précisant s'il s'agit d'outils descriptifs de nature eulerienne ou lagrangienne.

On dispose d'un appareil photographique à temps de pose réglable, préciser comment ces différentes lignes et trajectoires peuvent être visualisées.

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, que peut-on dire des lignes de courant et des trajectoires particulières ? (aucune démonstration n'est demandée).

- 4) Définir la dérivée particulaire d'un champ scalaire $f(M,t)$, notée $\frac{Df}{Dt}$, pour un fluide où le champ de vitesses est $\vec{v}(M,t)$.

Préciser, en la justifiant, son interprétation concrète en description lagrangienne (par exemple, expliquer le sens concret de la quantité $\frac{D\rho}{Dt}$: dérivée particulaire du champ de masse volumique du fluide).

- 5) Etablir la relation de continuité liant les champs de vitesse et de masse volumique du fluide, traduisant localement le principe de la conservation de la masse. Préciser très clairement l'étape du raisonnement où ce principe est utilisé.
- 6) Définir l'écoulement incompressible. Que peut-on dire du champ $\text{div } \vec{v}$ dans ce cas ?

B - Notions de déformations dans les écoulements.

Les variations locales du champ des vitesses provoquent en général une déformation, une variation de volume et une rotation des particules de fluide au cours de leur mouvement. L'étude de ces modifications permet de donner un sens concret aux opérateurs divergence et rotationnel, couramment utilisés en physique.

On considère pour simplifier un écoulement bidimensionnel plan (xOy), et on observe la déformation pendant une durée dt d'une particule de fluide plane initialement rectangulaire, de sommet $A(x,y)$, $B(x+dx, y)$, $C(x+dx, y+dy)$, $D(x, y+dy)$, de surface élémentaire $dxdy$. Après dt , les sommets du rectangle sont respectivement déplacés en A', B', C', D' .

- 7) Exprimer, au premier ordre en dt , l'aire de la particule fluide $A'B'C'D'$ en fonction de

dx, dy, dt , des dérivées $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ et $\frac{\partial v_y}{\partial y}$. En déduire la signification physique de la quantité $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$.

Généraliser ce résultat sans démonstration pour un écoulement tridimensionnel.

8) Que valent, au premier ordre en dt , les angles $d\theta = (\overline{AB}, \overline{A'B'})$ et $d\phi = (\overline{AD}, \overline{A'D'})$? La rotation globale de la particule est repérée par la rotation de la diagonale du rectangle, qui tourne de Ωdt pendant dt . Exprimer Ω en fonction de $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ et $\frac{\partial v_x}{\partial y}$.

Généraliser ce résultat sans démonstration pour un écoulement tridimensionnel en reliant le vecteur tourbillon $\overline{\Omega}$, qui représente les rotations du fluide, au vecteur vorticité $\overline{\omega} = \text{rot } \vec{v}$.

9) On donne quatre descriptions eulériennes (a), (b), (c), (d) de champs de vitesse d'un écoulement plan bidimensionnel. Caractériser chacun des écoulements (incompressible, rotationnel,...) et donner l'équation des lignes de courants et le champ de tourbillon $\overline{\Omega}$.

Associer à chaque écoulement une figure (i), (ii), (iii), (iv) données ci-dessous.

Donner des exemples concrets qui peuvent être modélisés par de tels écoulements.

(a) $\vec{v} = -ay\vec{e}_x + ax\vec{e}_y = ar\vec{e}_\theta$; (b) $\vec{v} = ax\vec{e}_x + ay\vec{e}_y = ar\vec{e}_r$;

(c) $\vec{v} = -ay\vec{e}_x$;

(d) $\vec{v} = -ax\vec{e}_x + ay\vec{e}_y$

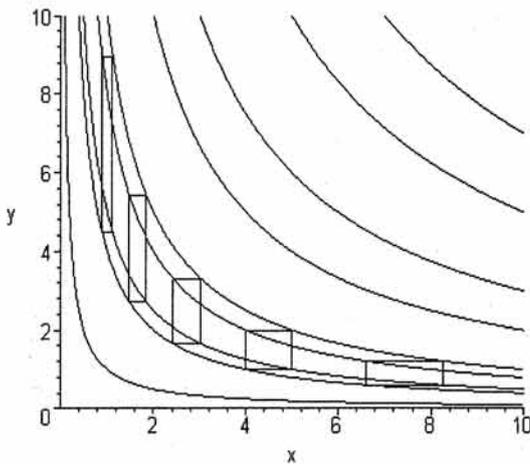


Figure i

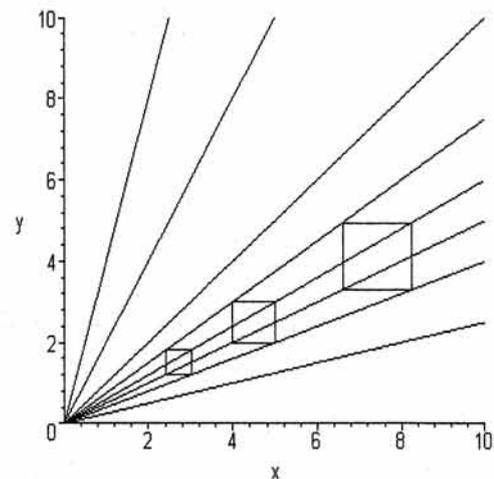


Figure ii

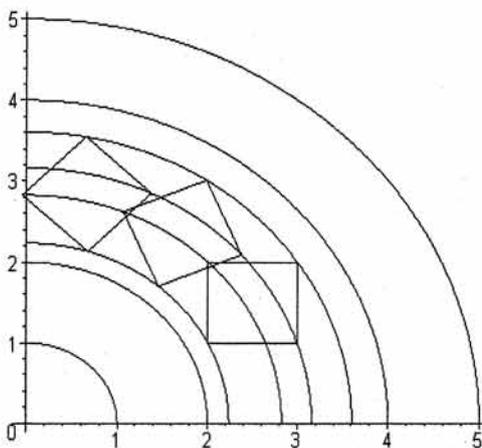


Figure iii

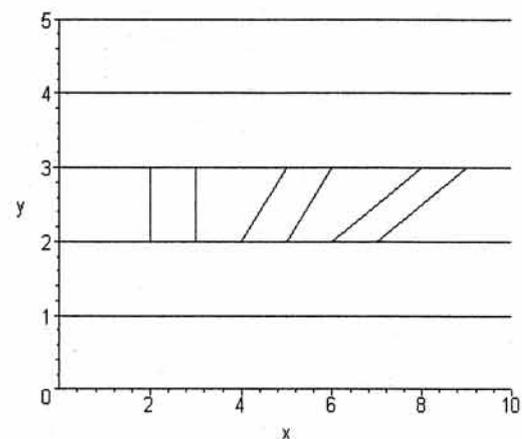


Figure iv

Écoulements stationnaires bidimensionnels dans le plan xOy ; représentation des lignes de courant, ainsi que des positions d'une particule de fluide élémentaire initialement rectangulaire de surface $dx dy$.

C - Un exemple de dispositif de mesures de vitesse d'un écoulement.

L'anémométrie à fil chaud.

L'anémométrie à fil chaud est une méthode de mesure de vitesse en un point fixe, faiblement intrusive. Le point fort de cette mesure est son excellente résolution spatiale et temporelle. Ces dispositifs sont constitués d'un fil fin d'environ 1 mm de long, de 1 à 10 μm de diamètre, tendu entre deux broches. Divers compromis entre conductivité thermique, résistivité et robustesse mécanique conduisent à privilégier pour le fil des matériaux comme le tungstène, le platine ou certains alliages.

Le principe de l'anémométrie à fil chaud consiste à mesurer la puissance transférée depuis un fil chauffé par effet Joule et refroidi par le passage du fluide. La puissance cédée au fluide donne une mesure indirecte de la vitesse de l'écoulement, mais pas sa direction.

On considère un fil de tungstène de longueur $L = 0,10 \text{ mm}$ et de diamètre d , tel que le rapport d'aspect $A = L/d$ soit très grand (typiquement 20). On fait circuler dans ce fil de résistance électrique R_f un courant d'intensité I . Le fil est porté à la température $T_f = 200 \text{ }^\circ\text{C}$, supposée uniforme dans le fil et supérieure à la température du fluide environnant, $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, supposée constante. On suppose la vitesse moyenne de l'air de l'ordre de $U \cong 1,0 \text{ m.s}^{-1}$ avec des fluctuations turbulentes telles que : $\frac{u'}{U} \cong 10\%$.

On néglige le rayonnement thermique, et le flux conducto-convectif de chaleur entre le fil et le fluide environnant s'écrit d'après la loi de Newton: $\frac{\delta Q}{dt} = h(T_f - T_0)\pi L d$.

On admet que la diffusion thermique est efficace au voisinage du fil dans une couche limite thermique d'épaisseur δ , du même ordre de grandeur que la couche limite visqueuse. Comme cela sera vu en partie II, cette épaisseur dépend de la vitesse U du fluide selon une loi $\delta = \frac{C}{\sqrt{U}}$, où C est une constante dépendant de la géométrie du fil. On pourra considérer ici que $C = 8,0 \cdot 10^{-6} \text{ SI}$ pour les applications numériques.

10) a) Estimer, à l'aide d'un modèle simple, le coefficient de conducto-convection h en fonction de la conductivité thermique de l'air λ_a et de δ .

b) La résistance électrique dépend linéairement de la température suivant : $R_f(T_f) = R_0 [1 + \alpha(T_f - T_0)]$, avec $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $R_0 = 0,50 \text{ } \Omega$. En déduire la loi

fondamentale de King de l'anémométrie : $\frac{R_f I^2}{R_f - R_0} = a \sqrt{U}$, où a est une constante qu'on

exprimera. En déduire qu'il existe deux stratégies pour mesurer une vitesse U de fluide, l'anémométrie à courant constant (obsolète de nos jours) ou l'anémométrie à température constante.

c) On suppose une variation de vitesse de $\Delta U = 0,10 U$. Estimer la variation de température du fil ΔT_f induite si l'intensité du courant reste constante.

d) On donne la capacité thermique massique $c_{fil} = 130 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ du film de tungstène et sa masse volumique $\rho_{fil} = 19 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Estimer la constante de temps thermique τ pour que le film atteigne sa nouvelle température d'équilibre, et en déduire la fréquence maximale qui serait ainsi mesurable avec $I = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ A}$.

II) Quelques éléments de la théorie de la portance.

L'étude de l'écoulement parfait, incompressible, de type « eau sèche », tel que le baptise R. Feynman dans son Cours de Physique est une partie importante de la mécanique des fluides. La force exercée par un écoulement fluide sur un corps solide (une aile en l'occurrence) dépend évidemment de la forme de ce corps. Néanmoins, dans le cas des écoulements potentiels, des résultats généraux peuvent être obtenus en considérant la forme asymptotique de l'écoulement loin de l'obstacle.

Sauf indication explicite, on ne tiendra pas compte des forces de pesanteur agissant sur le fluide.

Tous les écoulements considérés sont stationnaires.

A - Ecoulements bidimensionnels parfaits fondamentaux.

11) Généralités.

- a) Rappeler la définition d'un fluide parfait. Préciser les conditions aux limites vérifiées par le champ de vitesse et le champ de pression d'un écoulement de fluide parfait à la surface d'un solide.
- b) Etablir l'équation d'Euler qui relie les champs de vitesse et de pression dans un tel fluide.
- c) On envisage un écoulement parfait d'un fluide incompressible et on souhaite étudier l'influence de la courbure locale des lignes de courant sur la variation de pression du fluide. Pour cela, on se place dans le cas d'un écoulement plan où les forces en volume peuvent être négligées.

En appelant R le rayon de courbure d'une ligne de courant, montrer que l'équation d'Euler,

dans un repère naturel de Frénet, s'écrit :
$$\left(\rho \frac{Dv}{Dt}\right) \vec{t} + \left(\rho \frac{v^2}{R}\right) \vec{n} = -\overline{\text{grad} p}$$

où \vec{t} et \vec{n} sont les vecteurs unitaires tangent et normal (vers l'intérieur de la courbure) à la ligne de courant étudiée. En déduire que la pression augmente lorsqu'on s'éloigne du centre de courbure C de la ligne de courant. Ce résultat contribue à l'**effet Coanda** : rappeler en quoi consiste cet effet.

Décrire une expérience simple à réaliser permettant d'illustrer ce phénomène.

12) Ecoulements potentiels.

- a) Définir un potentiel des vitesses Φ que l'on peut associer à un écoulement irrotationnel. Dans le cas où l'écoulement est de plus incompressible, montrer que ce potentiel des vitesses Φ satisfait l'équation de Laplace.
- b) Pourquoi ce type d'écoulement trouve-t-il son intérêt principalement dans le cas des fluides parfaits ?
- c) Pour un écoulement parfait, irrotationnel, incompressible et homogène en régime stationnaire d'un fluide, établir la relation de Bernoulli.

d) Préciser, dans ces conditions, l'inégalité que doit vérifier la vitesse U , représentant l'échelle de vitesse caractéristique de l'écoulement, pour que ce dernier puisse être considéré comme incompressible. On pourra s'appuyer sur un raisonnement avec des ordres de grandeur. Discuter suivant la nature des fluides.

13) **Écoulement uniforme.**

Exprimer, à une constante additive près, un potentiel des vitesses Φ_{Uniforme} associé à un écoulement uniforme de vitesse $\vec{U} = U_0 \vec{e}_x$.

14) **Écoulement dipolaire cylindrique.**

Un écoulement de type dipolaire cylindrique est caractérisé par un potentiel donné, en coordonnées cylindriques, par $\Phi_{\text{dipole}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2}$, où $\vec{p} = p \vec{e}_x$ est le moment dipolaire associé à l'écoulement.

- a) Déterminer le champ de vitesse associé. Représenter graphiquement les lignes de courant.
- b) Montrer que ce potentiel des vitesses est analogue au potentiel électrostatique créé en un point éloigné par un ensemble de deux fils infinis, parallèles à l'axe Oz , situés en $x = -a/2$ et $x = +a/2$, respectivement chargés avec la densité linéique uniforme $-\lambda$ et $+\lambda$. Quel est le moment dipolaire électrique linéique associé à ce système ?

15) **Vortex de Rankine et ligne de vorticité.**

On s'intéresse à un écoulement incompressible bidimensionnel, dans le plan Oxy , vérifiant $\overline{\text{rot}} \vec{v} = \vec{\omega}_0$ à l'intérieur d'un cylindre d'axe Oz et de rayon a (« cœur du vortex ») et $\overline{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ à l'extérieur de ce cylindre. Le vecteur $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_z$ est uniforme.

- a) Montrer que la circulation du champ de vitesses sur un contour fermé restant extérieur en tout point au cylindre d'axe Oz et de rayon a est une constante notée Γ , indépendante du contour choisi, à exprimer en fonction de ω_0 et a .
- b) Déterminer le champ de vitesses en tout point extérieur au cœur du vortex, en fonction de Γ et r (on pourra s'appuyer sur une analogie magnétostatique).
- c) Montrer que, hors du cœur du vortex, le champ des vitesses dérive d'un potentiel des vitesses, noté Φ_Γ , à déterminer, à une constante additive près.
- d) Montrer que ce champ de vitesses dérive également d'un potentiel vecteur $\vec{\psi} = \psi(r) \vec{e}_z$, vérifiant $\vec{v} = \overline{\text{rot}}(\vec{\psi})$, à déterminer à une constante additive près.
Nous désignerons dans la suite par « ligne de vorticité » l'écoulement correspondant à un vortex de Rankine où l'on effectue le passage à la limite $a \rightarrow 0$, tout en gardant Γ constant.
- e) Quel est l'analogie magnétostatique d'une ligne de vorticité ?

B - Ecoulement autour d'un cylindre de révolution sans circulation.

On étudie le cas d'un écoulement parfait, incompressible irrotationnel et stationnaire d'air autour d'un cylindre d'axe Oz , à base circulaire, de rayon a , de hauteur H . L'écoulement loin de l'obstacle se fait à la vitesse uniforme $\vec{U} = U_0 \vec{e}_x$ et à la pression P_0 .

16) On cherche le potentiel des vitesses comme superposition des potentiels correspondant à un écoulement uniforme de vitesse orienté dans la direction $\theta = 0$ et à un écoulement dipolaire cylindrique \vec{p} orienté dans la même direction : $\Phi = \Phi_{\text{uniforme}} + \Phi_{\text{dipôle}}$.

- a) Déterminer en fonction de U_0 et a le dipôle \vec{p} qui convient pour ce problème. En déduire en fonction de U_0 , θ, r et a le champ des vitesses en tout point extérieur au cylindre.
- b) Tracer schématiquement l'allure des lignes de courant de cet écoulement. Placer les points d'arrêt.

C - Ecoulement autour d'un cylindre de révolution avec circulation.

On superpose à l'écoulement traité ci-dessus, un écoulement de type vortex, de circulation Γ , de sorte que le potentiel des vitesses est désormais : $\Phi = \Phi_{\text{uniforme}} + \Phi_{\text{dipôle}} + \Phi_{\Gamma}$.

17) Expliquer pourquoi ce type de solution peut convenir pour modéliser une situation où le cylindre tourne sur lui-même à une vitesse angulaire Ω à exprimer en fonction de Γ et a .

18) Déterminer le champ de vitesses résultant.

Existe-t-il des points d'arrêt à la surface du cylindre ?

Pour cela on pourra distinguer deux régimes, suivant les valeurs relatives de $|\Gamma|$ et $|U_0|$.

Tracer les cartes de courant dans chaque cas.

La relation donnant l'angle θ_a définissant les points d'arrêts éventuels en fonction de Γ et U_0 est dite **condition de Kutta**.

19) On donne ci-dessous (figure 2) le tracé des lignes de courant pour un jeu de valeurs particulières de U_0 , a et Γ .

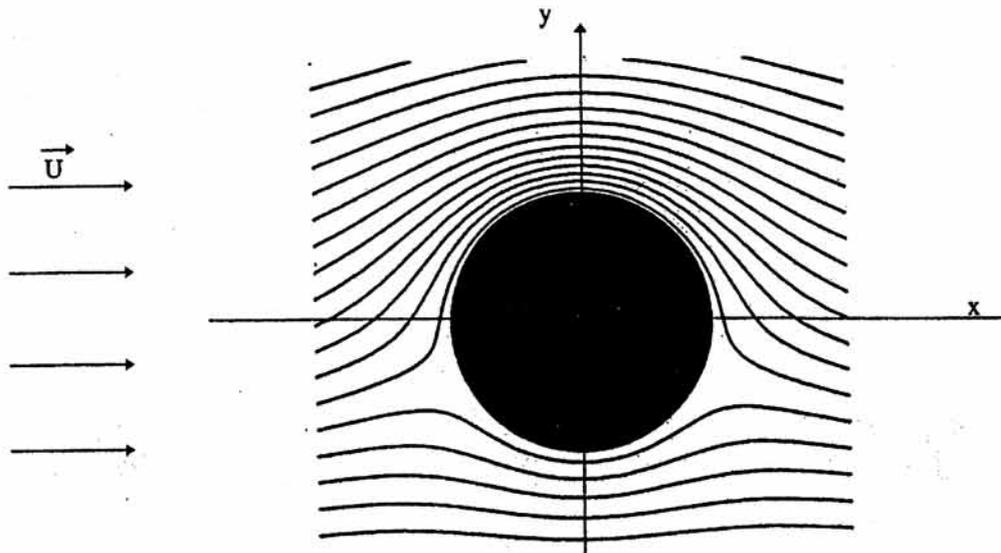


Figure 2

- Comparer qualitativement le module v de la vitesse du fluide pour les points situés sur l'axe Oy selon que $y > a$ ou $y < -a$.
- Indiquer le signe de Γ et préciser le sens de rotation du cylindre.
- En exploitant le tracé ci-dessus, justifier l'existence de points d'arrêt du fluide à la surface du cylindre. Donner la valeur numérique approchée du rapport $\frac{|\Gamma|}{U_0 a}$ correspondant à ce schéma.
- Que peut on en déduire qualitativement sur la résultante des actions de pression sur le cylindre ?

20) **Actions résultantes.**

a) Soit \vec{F} la résultante de l'action de l'air sur le cylindre. Donner, sans calcul mais en les justifiant, la valeur de la composante F_x et celle du moment par rapport à l'axe Oz de cette action.

Est-ce conforme à l'observation expérimentale ?

b) Le cylindre ayant une hauteur H , établir l'expression de la composante F_y de \vec{F} en fonction de ρ , U_0 , Γ et H puis de ρ , U_0 , a , θ_a et H .

Commenter le cas où $\Gamma = 0$, dit « **Paradoxe de d'Alembert** ».

Citer des applications envisageables pour Γ non nul.

D - Généralisation ; portance d'une aile d'avion d'envergure infinie dans un écoulement incompressible.

Théorème de Kutta-Joukowski.

Une aile d'envergure supposée infinie assimilée à un solide cylindrique (à base quelconque) est placée dans un fluide en écoulement. A grande distance, la vitesse $\vec{U} = U_0 \vec{e}_x$ de l'écoulement est normale aux génératrices du cylindre et la pression est uniforme et vaut P_0 .

On suppose que la viscosité est négligeable et que l'écoulement est potentiel à l'extérieur d'une surface cylindrique Σ_0 qui entoure le solide.

On suppose de plus que le fluide, de masse volumique ρ est incompressible. On convient toujours de ne pas prendre en compte les effets de la pesanteur.

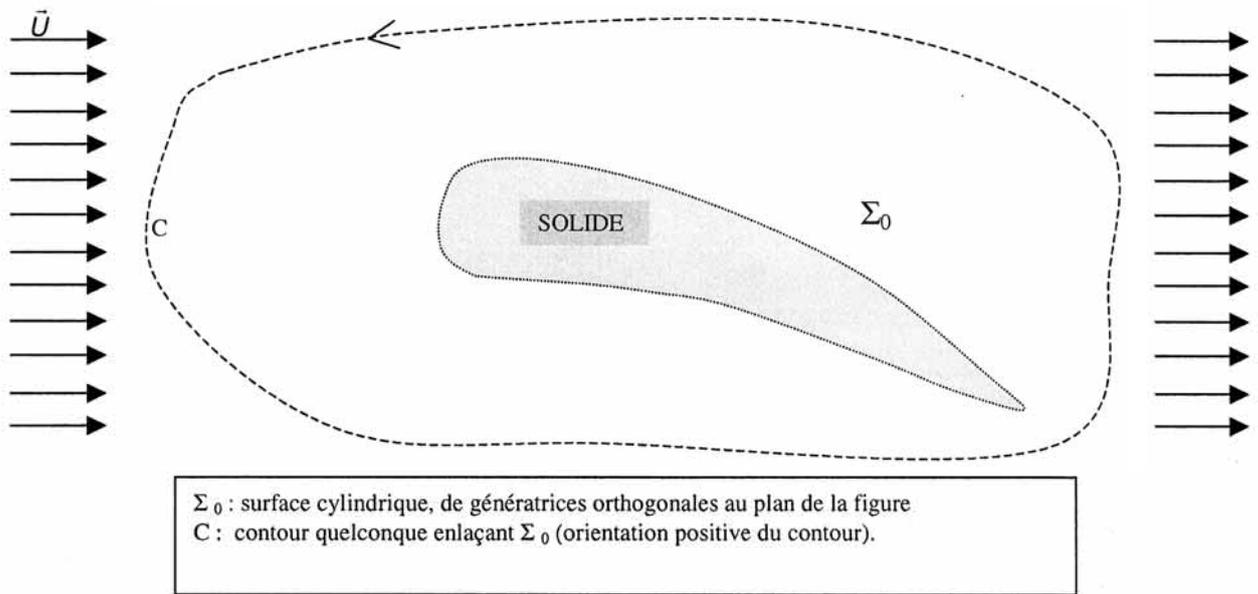


Figure 3

D'après nos hypothèses l'écoulement est à deux dimensions : $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$.

Posons $\vec{v} = \vec{U} + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{U} + \overline{grad}(\Phi_1) + \overline{grad}(\Phi_2)$ où les champs \vec{v}_i sont les perturbations apportées au champ \vec{U} par la présence de l'aile. Φ_1 traduit l'influence de la circulation de l'air autour de l'aile, et Φ_2 l'influence de l'obstacle à grande distance, de type multipolaire (on pourra se restreindre au premier terme non nul de type dipolaire).

La circulation du champ des vitesses a une valeur Γ le long d'une courbe C qui enlace Σ_0 . L'origine de cette circulation n'est pas précisée ; il peut s'agir d'une rotation du solide, ou de tourbillons (de démarrage) créés au niveau du solide, comme c'est le cas pour une aile d'avion.

21) A grande distance de l'aile, montrer que, en négligeant les termes du second ordre en $\frac{1}{r}$, le champ de pression vérifie : $P = P_0 - \rho U_0 v_{1x}$.

Soit Σ_∞ une surface cylindrique de révolution, de très grand rayon devant la taille de l'aile, de hauteur dz (figure 4). On considère le volume de contrôle délimité par la surface extérieure Σ_∞ et par la surface intérieure Σ_0 infiniment proche de l'aile.

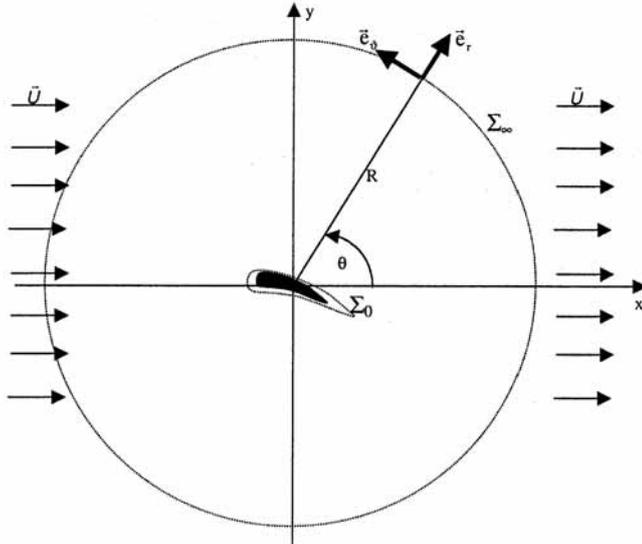


Figure 4

22) Montrer que les débits **sortants** à travers Σ_∞ de la quantité de mouvement selon Ox et de la quantité de mouvement selon Oy s'écrivent :

$$D_{p_x} = \iint_{\Sigma_\infty} \rho (v_x^2 \cos \theta + v_x v_y \sin \theta) dS \quad \text{et} \quad D_{p_y} = \iint_{\Sigma_\infty} \rho (v_x v_y \cos \theta + v_y^2 \sin \theta) dS$$

23) Déterminer de même les composantes dF_{p_x} , et dF_{p_y} selon les directions \vec{e}_x et \vec{e}_y de la résultante des forces de pression agissant sur Σ_∞ .

24) A l'aide d'un bilan détaillé de quantité de mouvement, en négligeant les termes de vitesse du second ordre en $\frac{1}{R}$, déduire des questions précédentes que la force linéique des actions exercées sur l'aile, appelée **force de Magnus**, s'écrit :

$$\frac{d\vec{F}}{dz} = \rho \vec{U} \wedge \Gamma \vec{e}_z \quad (1)$$

25) Discuter du sens de cette force. Retrouver qualitativement ce sens en appliquant la relation de Bernoulli en deux points opposés situés au-dessus et en-dessous de l'aile.

E - Ecoulement de l'air autour d'une aile modélisée avec un angle de cabrage ; méthode de superposition.

Le théorème de Kutta Joukowski permet de déterminer la résultante des forces agissant sur l'aile si l'on connaît la circulation Γ . Dans cette partie, on propose une évaluation de Γ pour une géométrie simple

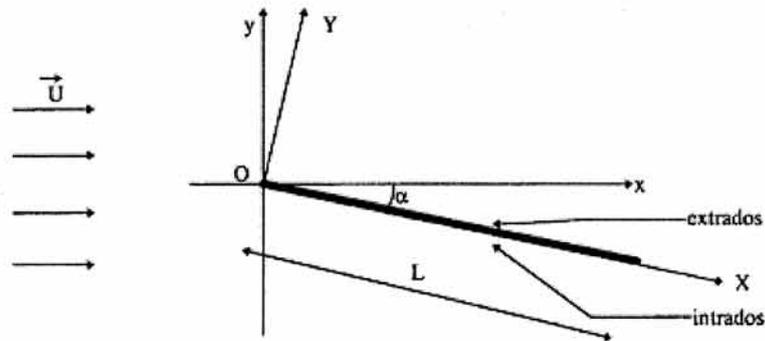


Figure 5

Une aile d'avion est modélisée par une plaque rectangulaire de largeur L que l'on appelle corde, de profondeur H que l'on appelle envergure, d'épaisseur e très faible. Cette plaque présente un angle de cabrage α , angle géométrique positif dont la valeur sera toujours considérée comme faible (voir figure 5). L'aile est située dans le plan $Y = 0$.

L'avion se déplace à la vitesse $\vec{U}_0 = -U_0 \vec{e}_x$ selon l'axe Ox si bien qu'une étude dans le référentiel de l'avion conduit à un fluide en mouvement dont l'écoulement loin de l'obstacle se fait à la vitesse uniforme $\vec{U} = U_0 \vec{e}_x$ et à la pression P_0 .

On se propose d'évaluer la discontinuité de la vitesse du fluide de part et d'autre du profil de l'aile sur l'extrados et sous l'intrados.

26) Montrer qu'une discontinuité de vitesse tangentielle, modélisée par $v_x = U_1$ pour $Y > 0$, et $v_x = U_2$ pour $Y < 0$, peut être associée à une nappe surfacique de vorticité, infiniment fine et continue dans le plan $Y = 0$ avec une densité par unité de longueur γ suivant OX   évaluer en fonction de U_1 et U_2 .

27) Quel est l'analogie électromagnétique du résultat de la question précédente ?

On a vu que la superposition à un écoulement homogène et parallèle d'un dipôle et d'un fil tourbillonnaire traduisait l'écoulement autour d'un cylindre avec une portance donnée par la loi de Magnus. De façon similaire, un profil portant avec une **ligne de squelette** (représentée par la plaque rectangulaire) inclinée d'un angle α par rapport à l'écoulement homogène plan peut être construit par la superposition, à un écoulement homogène, d'une distribution de lignes tourbillonnaires d'axe Oz correspondant à une couche de densité $\gamma(X)$, localisée le long de l'aile, modélisée par l'équation $y = -\alpha \frac{x}{L} = f(x)$ pour des petits angles.

La densité $\gamma(X)$ peut alors se calculer à partir de l'équation du profil $y = f(x)$ et de la connaissance de Γ donnée par la condition de Kutta (voir question 18) avec les correspondances $\theta_a = -\alpha$ et

$L = 4a$, qui impose, sur le **bord de fuite** pointu du profil en $x = L$, une différence nulle entre la vitesse sur l'extrados et celle sur l'intrados (correspondant au point d'arrêt aval).

28) Montrer que la fonction $\gamma(X) = -2\alpha U_0 \sqrt{\frac{L-X}{X}}$ répond aux propriétés recherchées. On donne

$$\int_0^L \sqrt{\frac{L-x}{x}} dx = \frac{\pi L}{2}.$$

L'écoulement peut s'écrire sous la forme $\vec{v} = \vec{U} + \vec{v}_T(M)$ où \vec{v}_T est associé à la distribution de lignes tourbillonnaires.

29) a) On note $v_{T^+}(X)$ la composante tangentielle sur le vecteur de base \vec{e}_x de $\vec{v}_T(M)$ sur la surface de l'extrados et $v_{T^-}(X)$ cette composante sur l'intrados. Dédurre des symétries du problème (on pourra s'inspirer d'une analogie magnétostatique) l'expression des vitesses $v_{T^+}(X)$ et $v_{T^-}(X)$.

b) Donner les composantes tangentielles $v_i^+(X)$ et $v_i^-(X)$ de la vitesse totale de l'écoulement de l'air à la surface respectivement de l'extrados et de l'intrados en fonction de U_0, X, L et α .

30) a) Exprimer les pressions $P^+(X)$ et $P^-(X)$ au niveau de l'extrados et de l'intrados en fonction de U_0, ρ, L, α, X , au premier ordre en α .

b) En déduire la composante F_y de la résultante de l'action de l'air sur l'aile (force de portance) en fonction de H, U_0, ρ, L et α . Cette étude est elle compatible avec le théorème de Kutta- Joukowski ?

Le coefficient de portance pour l'aile mince rectangulaire est défini par : $C_y = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 LH}$.

Préciser sa dimension et l'exprimer en fonction de α .

c) Estimer numériquement la portance sur une aile dans les deux cas suivants extrêmes ;

| | Vitesse au décollage U | Corde L | Envergure H | Angle de cabrage α | Masse de l'appareil M |
|----------------------------------|--------------------------|-----------|---------------|---------------------------|-------------------------|
| Avion de ligne type Airbus A320 | 300 km/h | 5 m | 35 m | 10° | 75 t |
| Avion de chasse type Mirage 2000 | 350 km/h | 5 m | 9 m | 20° | 16 t |

Commenter les valeurs obtenues en évaluant par exemple les ordres de grandeur des accélérations verticales atteignables par chacun de ces avions.

d) Il est également utile de connaître le moment M_z dit de **tangage** par unité de longueur de l'aile des efforts de portance, par rapport à un axe parallèle au **bord d'attaque** en $X = 0$.

Exprimer M_z en fonction de H, U_0, ρ, L et α ; on donne $\int_0^L \sqrt{x(L-x)} dx = \frac{\pi}{8} L^2$.

En déduire le point d'application de la portance X_F . Quelle est l'importance de ce paramètre en ce qui concerne l'équilibre et la stabilité de l'aile en cours de vol ?

On définit également un coefficient

de moment $C_m = \frac{M_z}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 L^2 H}$.

Exprimer C_m .

e) La figure 6 représente un diagramme expérimental des coefficients C_y en fonction de α pour un profil d'aile réel (de type NACA). Commenter à la lumière des résultats précédents.

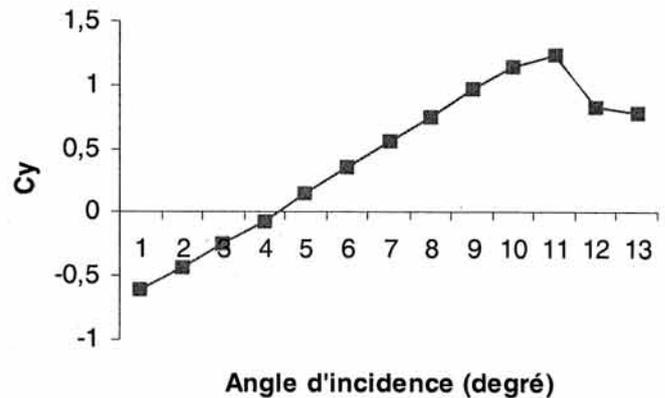


Figure 6

III) Éléments de théorie de la traînée. Un modèle de couche limite.

La naissance de tourbillons au voisinage du profil de l'aile d'un avion ainsi que l'existence d'une force s'opposant à l'avancement de ce dernier sont fondamentalement liées à la viscosité du fluide. Dans un premier temps, nous allons examiner un écoulement où les effets visqueux sont entièrement dominants. En particulier la viscosité du fluide impose toujours que la vitesse de l'écoulement soit nulle au voisinage immédiat d'une paroi solide au repos, en contradiction avec l'hypothèse de glissement utilisée pour les écoulements parfaits de fluide vus dans la partie II. Il est possible de réconcilier ces deux points de vue contradictoires en introduisant une couche limite dans laquelle les effets visqueux sont confinés, et en dehors de laquelle les effets visqueux sont négligeables. L'existence de cette couche limite provient des effets combinés de la viscosité et de la convection sur le transport de la quantité de mouvement et sera étudiée en partie III B.

A - Modèle de Stokes ; la force de viscosité sur une sphère.

31) Rappeler les caractéristiques essentielles qui définissent un fluide newtonien.

Expliciter sans démonstration l'expression de la force surfacique de viscosité qui s'exerce au sein d'un fluide en écoulement unidirectionnel du type $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$.

32) L'équation locale de la dynamique pour un fluide newtonien incompressible de viscosité η est, en ne tenant pas compte des forces de gravitation (équation de Navier Stokes) :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \eta \Delta \vec{v} \quad (2)$$

a) Identifier dans cette équation les termes convectif et diffusif.

b) Définir le nombre de Reynolds R_e , et donner son expression pour une situation caractérisée par une échelle de vitesse U et une échelle de distance L .

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible autour d'une sphère de rayon R , en l'absence de toute force autre que de viscosité.

On utilisera le repère de projection en coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe Ox où O est le centre de la sphère et θ la colatitude.

A grande distance de la sphère, les champs de vitesse et de pression sont uniformes $\vec{U} = U_0 \vec{e}_x$ et $P = P_0$.

On se place en régime stationnaire et on suppose que la vitesse est suffisamment faible pour négliger les termes non linéaires de l'équation dynamique locale.

Le champ des vitesses est alors le suivant :

$$\begin{cases} v_r = U_0 \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \\ v_\theta = -U_0 \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \\ v_\varphi = 0 \end{cases}$$

33) a) Montrer que : $\Delta \vec{v} = -\overrightarrow{grad} \left(3U_0 \frac{R \cos \theta}{2r^2} \right)$

b) Déterminer la valeur de la pression en tout point de la surface de la sphère.

c) Calculer la résultante des forces de pression agissant sur la sphère.

34) On admet que la force de cisaillement exercé par le fluide sur un élément de surface de sphère est donnée par $d\vec{F}_{viscosité} = -\frac{3\eta U_0 R \sin^2 \theta}{2} d\theta d\varphi \vec{e}_\theta$. Justifier qualitativement cette expression, en s'appuyant sur le résultat de la question 31.

Calculer la résultante des forces de cisaillement sur la sphère.

35) a) Vérifier que la force de traînée sur la sphère est donnée par la loi de Stokes $\vec{F} = 6\pi\eta R U_0 \vec{e}_x$. Par analogie avec la question 30, définir un coefficient de traînée C_x et l'exprimer en fonction du nombre de Reynolds.

b) La figure 7, en coordonnées log-log, reproduit la courbe expérimentale $C_x = f(R_e)$, où R_e désigne le nombre de Reynolds.

A partir de cette figure, préciser le domaine de validité de la loi de Stokes.

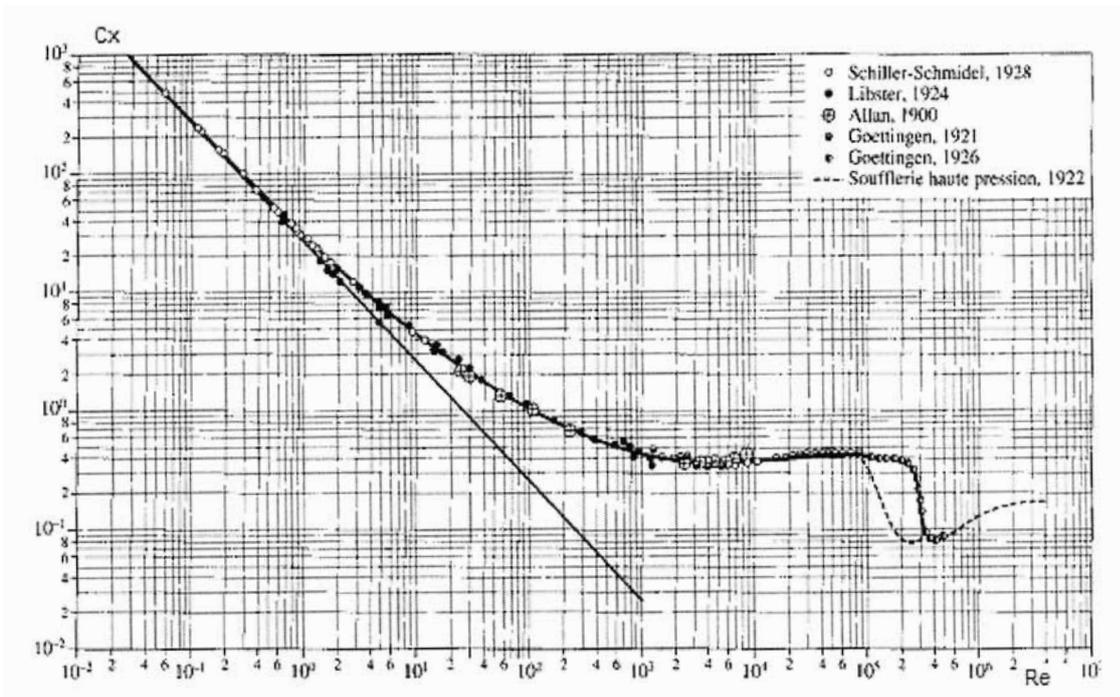


Figure 7

c) Pour quel domaine de vitesse (dans un fluide donné et pour une sphère donnée), la force de traînée est-elle proportionnelle au carré de la vitesse de déplacement de la sphère ? Préciser l'expression de cette force de traînée.

B - Modèle de la couche limite laminaire et force de traînée.

On constate expérimentalement que les écoulements autour d'un obstacle solide sont souvent très bien décrits par le modèle du fluide parfait, alors que les hypothèses sur lesquelles il est fondé peuvent sembler totalement irréalistes (essentiellement à cause des conditions aux limites inadapées).

Le modèle de la couche limite permet de comprendre le succès du modèle de l'écoulement parfait en considérant que les effets de la viscosité ne sont sensibles qu'au voisinage immédiat du solide. En dehors de cette « couche limite », l'écoulement est considéré comme parfait.

Les questions qui suivent ont pour objet de quantifier ces idées, à partir d'un premier problème posé par Stokes puis du modèle de Prandtl-Blasius.

36) Mise en mouvement d'une plaque infinie surmontée d'un fluide : épaisseur de diffusion.

Considérons une plaque plane infinie, dans le plan $y = 0$, surmontée d'un fluide également infini, de viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$. Le fluide est initialement immobile dans le référentiel d'étude, noté OXY . A l'instant $t = 0$, la plaque est brusquement mise en mouvement avec une vitesse $\vec{v} = -U_0 \vec{e}_x$. On cherche le champ de vitesses dans le fluide $\vec{v} = v(Y, t) \vec{e}_x$, pour $Y > 0$ et $t > 0$. Loin de la plaque ($Y \rightarrow +\infty$) la pression est supposée uniforme.

- Montrer que la pression est uniforme dans l'ensemble du fluide.
- Ecrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v(Y,t)$, la caractériser ; précisez les conditions initiales et aux limites.
- On admet que la solution du problème se présente sous la forme :

$$v(Y,t) = A \operatorname{erf} \left(\frac{Y}{\sqrt{\nu t}} \right) + B$$
, où $\operatorname{erf}(u)$ est la « fonction erreur », dont quelques propriétés ont été rappelées en préambule, et A, B sont des constantes.
 Déterminer les constantes A, B en fonction de U_0 .
- Représenter graphiquement $v(Y,t)$ à un instant donné. Quel sens concret peut-on donner à la grandeur $\delta = \sqrt{\nu t}$?

37) *Mise en mouvement d'une plaque semi-infinie surmontée d'un fluide - problème de Stokes.*

Les hypothèses sont celles de la question précédente, mais la plaque est ici semi infinie, et occupe la portion $X > X_0(t)$ du plan $Y = 0$. A l'instant $t = 0$, la plaque, dont le bord d'attaque se trouve en $X_0(0) = 0$, est brusquement mise en mouvement avec la vitesse $\vec{v} = -U_0 \vec{e}_x$.

Le modèle adopté consiste à supposer que :

- Pour $X < X_0(t)$, le fluide est immobile ;
- Pour $X > X_0(t)$, le mouvement du fluide est celui qu'on observerait avec une plaque infinie qui aurait été mise en mouvement à l'instant t_x vérifiant $X_0(t_x) = X$.

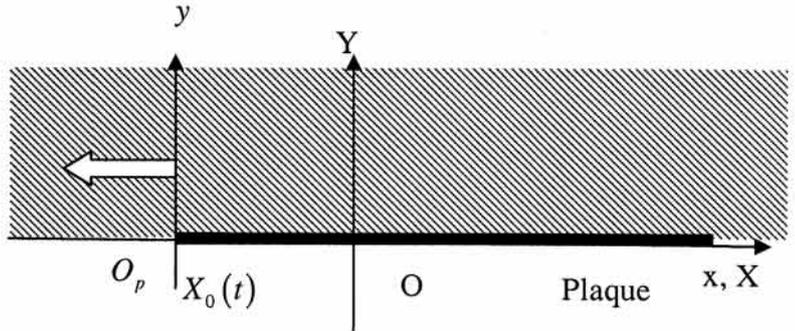


Figure 8

- Déterminer le champ de vitesses du fluide $\vec{v}(x,y) = v(x,y) \vec{e}_x$, dans le référentiel d'axes $O_p xy$ lié à la plaque. Montrer que l'on peut écrire $v(x,y) = U_0 F \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)$, où

$$\delta(x) = \sqrt{\nu \frac{x}{U_0}}$$
 et F est une fonction à déterminer.

- Représenter graphiquement $v(x,y)$ pour $x > 0$, en faisant clairement apparaître la grandeur $\delta(x)$.
- Cette solution est elle compatible avec le caractère incompressible du fluide ?

38) **Modèle de Prandtl- Blasius.**

On souhaite étudier l'écoulement de l'air au dessus d'une aile, de corde ℓ et d'envergure H .

Pour simplifier, on considère pour commencer le cas d'une aile plane, occupant la portion $0 < x < \ell$ du plan $y=0$, placée dans un écoulement incompressible, uniforme à l'infini. Dans le référentiel lié à l'aile, l'écoulement est supposé bidimensionnel et stationnaire : $\vec{v} = v_x(x, y)\vec{e}_x + v_y(x, y)\vec{e}_y$. Loin de l'aile, on a $\vec{v} = U_0\vec{e}_x$.

Le modèle de Prandtl - Blasius postule, comme dans le modèle de Stokes, l'existence de deux longueurs caractéristiques de variation des champs :

- la longueur ℓ de l'aile pour les variations selon \vec{e}_x ,
- la longueur $\delta(x) = \sqrt{\nu \frac{x}{U_0}}$, pour les variations selon \vec{e}_y . On se restreint à l'hypothèse $\delta(x) \ll \ell$.

Par ailleurs Prandtl a émis, dans son article fondateur de 1904, les hypothèses suivantes :

- Le champ de vitesse longitudinal est donné, comme dans le modèle de Stokes, par une expression auto-similaire : $v_x(x, y) = U_0 f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)$, où f est une fonction à déterminer ;
- A l'extérieur de la couche limite, d'épaisseur locale de l'ordre de $\delta(x)$, le champ des vitesses est celui d'un écoulement parfait.

a) En raisonnant en ordre de grandeur, montrer que : $|v_y| \ll |v_x|$.

De même, montrer que l'équation de Navier Stokes conduit, après simplifications à justifier,

à :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (3)$$

Montrer, qu'en ordre de grandeur, on peut écrire : $\left| \frac{\partial P}{\partial y} \right| \cong \rho \frac{U_0^2 \delta}{L^2}$. En déduire que les variations de la pression dans la direction Oy sont négligeables.

b) En dehors de la couche limite, l'écoulement est supposé parfait et quasi-parallèle à l'axe Ox , de vitesse U_0 . Montrer que : $P(x) + \frac{1}{2} \rho U_0^2 = \text{constante}$.

On pose $w = \frac{y}{\delta(x)}$, de sorte que l'on peut écrire $v_x(x, y) = U_0 f(w)$ et $v_y(x, y) = U_0 g(x, w)$.

c) Traduire les conditions aux limites $y \rightarrow 0$ et $y \rightarrow \infty$ pour les fonctions f et g .

d) En écrivant la condition d'incompressibilité de l'écoulement montrer que :

$$g(x, w) = \frac{1}{2\sqrt{Re(x)}} \left[w \cdot f(w) - \int_0^w f(\xi) d\xi \right], \text{ où l'on a posé } Re(x) = \frac{U_0 x}{\nu}.$$

En déduire d'après l'équation de la dynamique de la couche limite :

$$2f''(w) + f'(w) \int_0^w f(\xi) d\xi = 0$$

e) La solution $f(w)$ de cette **équation dite de Blasius** a été obtenue numériquement (figure 9).

Commenter la courbe, en distinguant notamment deux régions au comportement différent ; à partir de cette courbe, donner une expression approchée de la composante v_x de la vitesse dans la couche limite. A quelle distance $d(x)$ de la plaque, à déterminer en fonction de $\delta(x)$, peut on considérer que l'on est en dehors de la couche limite ?

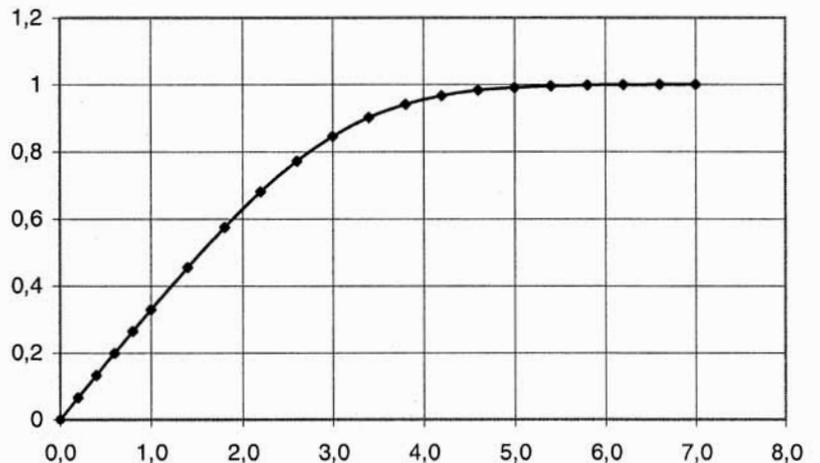


Figure 9

39) a) Montrer que la force de **traînée due au frottement** sur l'ensemble des deux faces de l'aile plane de corde ℓ , d'envergure H s'écrit : $F_x = \frac{4\rho H \ell f'(0)}{\sqrt{Re(\ell)}} U_0^2$. En déduire le coefficient de traînée C_x , le comparer à l'expression obtenue en question 35 et commenter.

b) Supposons que la vitesse de l'écoulement extérieur $U_0(x)$ varie avec la distance au bord d'attaque de l'aile. Exprimer le signe du gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial x}$ dans la couche limite en fonction de ρ, U_0 et $\frac{dU_0}{dx}$.

Quel doit être le sens de variation de $U_0(x)$ pour que le gradient de pression provoque un renversement local du sens de l'écoulement près de l'aile ? Ce phénomène est dit de **décollement de la couche limite**.

c) Le décollement de la couche limite laminaire dans le sillage d'une aile d'avion contribue à augmenter le coefficient de traînée, et provoque des phénomènes de turbulence engendrant des pertes d'énergie.

Des essais en soufflerie ont permis de mesurer les coefficients de portance C_y et de traînée C_x d'un profil d'aile de type NACA, en fonction de l'angle d'incidence ainsi que la finesse $F = C_y / C_x$ pour un nombre de Reynolds voisin de 10^6 . Commenter ces deux courbes (figures 6 et 10). Connaissez-vous un moyen de remédier partiellement à ces défauts ?

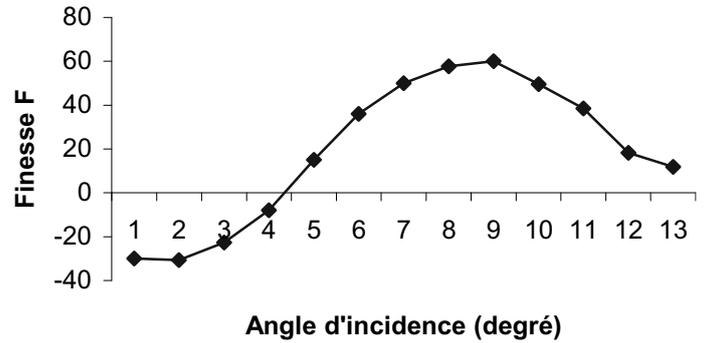


Figure 10

C - Quelques éléments de mécanique du vol. Importance des coefficients C_x et C_y .

On modélise les ailes d'un avion par un rectangle mince de largeur, la corde ℓ et de longueur, l'envergure H . La surface alaire est donc $S = H\ell$. On introduit le coefficient d'allongement ou rapport d'aspect $A = H^2 / S$. Dans ces conditions la force de portance responsable de la sustentation, peut s'écrire, en tenant compte de l'envergure limitée H d'une aile : $F_y = \frac{1}{2} C_y \rho S V^2$ avec

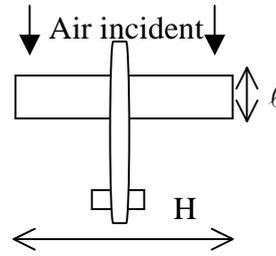


Figure 11: avion vu de haut

$$C_y = \frac{2\pi \sin \alpha}{1 + \frac{2}{A}}$$

pour une aile faisant un angle α avec l'écoulement d'air incident supposé horizontal (selon l'axe Ox).

Modélisation de la traînée induite développée par Bradley Jones en 1942 à partir d'un principe énoncé par Rankine en 1858.

40) Le flux d'air est dévié vers le bas, ce qui provoque des tourbillons marginaux aux extrémités de l'aile, qui sont à l'origine d'une force de traînée supplémentaire que l'on peut écrire sous la forme :

$$F_{x,i} = \frac{1}{2} C_{x,i} \rho S V^2 \text{ avec } C_{x,i} = \frac{C_y^2}{\pi A}$$

On se propose d'interpréter les expressions de C_y et $C_{x,i}$ données ci-dessus, en effectuant un bilan de quantité de mouvement sur une veine de fluide convenablement choisie. L'avion se déplace à une vitesse $\vec{V} = -V\vec{e}_x$ uniforme par rapport à l'air, on raisonne sur une hauteur d de fluide, de largeur H correspondant à l'envergure de l'aile. On suppose que le flux d'air est dévié vers le bas avec

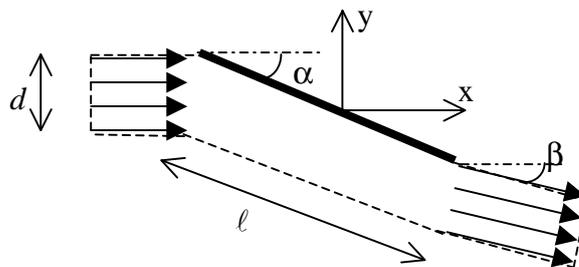


Figure 12 : aile vue de profil

un petit angle β en conservant une vitesse quasi-constante en module. L'air est considéré comme un fluide parfait en écoulement incompressible et stationnaire.

Déterminer les forces de portance F_y et de traînée induite $F_{x,i}$ en effectuant un bilan de quantité de mouvement sur la surface de contrôle délimitée en pointillés sur la figure 12. La hauteur d , ainsi que l'angle β sont les paramètres à déterminer.

Vérifier que : $\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2 \sin \alpha}{A+2}$ et $d = \frac{\pi H}{4} \left(1 + \frac{4 \sin^2 \alpha}{(A+2)^2}\right)$.

Discuter les variations de $F_{x,i}$ et F_y pour un angle β donné si $\ell \ll H$.

Montrer que pour $A > 4$, on peut considérer que $d \approx \frac{\pi H}{4}$. On supposera cette condition vérifiée dans la suite du problème.

Montrer que les deux forces dépendent de H^2 , commenter les expressions de $F_{x,i}$ et F_y .

Modélisation de la traînée de frottement.

41) On cherche à trouver un modèle élémentaire pour la traînée dite de frottement, qu'on peut écrire sous la forme : $F_{x,f} = \frac{1}{2} C_{x,\alpha=0} \rho S V^2$, où $C_{x,\alpha=0} = C_0$ désigne le coefficient de frottement pour une aile de surface S sous un angle d'attaque $\alpha = 0$, la portance étant alors nulle. On admettra que cette expression reste valable pour un faible angle d'attaque. On se place toujours en régime stationnaire, on suppose que la vitesse relative de l'air à l'entrée de la surface de contrôle est $\vec{V}_1 = V \vec{e}_x$ et à la sortie $\vec{V}_2 = (V - \Delta V) \vec{e}_x$ avec $\Delta V \ll V$. En exprimant un nouveau bilan de quantité de mouvement, montrer que la traînée de frottement peut s'écrire : $F_{x,f} = \frac{\pi}{4} H^2 \rho V \Delta V$.

En déduire une expression de $\Delta V / V$ en fonction de C_0 et A . Commenter.

42) On considère que les **angles α et β sont très petits**. On étudie un vol de croisière horizontal, à vitesse horizontale constante. Déterminer une expression de $\sin(\beta)$ en fonction de M, H, ρ, V et de l'accélération de la pesanteur g . Exprimer la force de traînée totale F_x en fonction de la vitesse V , et de ρ, A, S, C_0, M, g .

43) a) Exprimer la valeur de la vitesse de croisière de l'avion V_0 correspondant à un minimum de puissance $P(V)$ nécessaire pour conserver l'avion sur sa trajectoire. Montrer que :

$$V_0^4 = \frac{4}{3\pi C_0 A} \left(\frac{Mg}{\rho S}\right)^2 \text{ et } P_{min} = 2 \left(\frac{4}{3\pi A}\right)^{3/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{(\rho S)^{1/2}} C_0^{1/4}.$$

Discuter de l'influence des divers paramètres. Comparer, pour la vitesse de croisière $V = V_0$ les contributions de chaque traînée à la force de traînée totale.

Tracer sur un même graphe $P(V), F_{x,i}(V)$ et $F_{x,f}(V)$. Commenter.

b) Dans ces mêmes conditions de vol, on cherche la distance maximale franchissable D pour une réserve donnée de fuel. Montrer que cela correspond à la vitesse V' pour laquelle $F_{x,f}(V') = F_{x,i}(V')$ et que $V' \approx 1,3V_0$. Trouver la puissance P' correspondante.

c) Pour un biplace Cessna 152, on donne : $M = 700\text{kg}$, $H = 10,2\text{ m}$, $S = 14,8\text{ m}^2$, $A = 7,0$, la puissance maximale du moteur $P_{\max} = 82\text{ kW}$, la vitesse $V' = 31\text{ m.s}^{-1}$ et la finesse maximale à la vitesse V' , $F_{\max} = \frac{C_y}{C_{x,i} + C_0} = 11$. Calculer C_y , α , C_0 , P' , β . Commenter.

La finesse aérodynamique et son importance pratique.

d) La finesse joue un rôle essentiel pour l'efficacité opérationnelle d'un avion : ici on peut écrire $C_x = C_{x,i} + C_{x,f}$ et $F = C_y / C_x$. Toujours pour un vol de croisière à vitesse constante de module V et en phase propulsée, la masse de l'avion diminue en raison de la consommation en carburant selon la relation : $dM = -K_s F_M dt$, où K_s est la consommation spécifique de kérosène en kg/daN/h, F_M l'effort propulsif (traction ou poussée). Montrer que la distance franchissable s'exprime en fonction de la masse M_1 de l'avion au décollage et de sa masse M_2 à l'atterrissage : $D = \frac{FM_a c_s}{gK_s} \ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$ où $M_a = V / c_s$ désigne le nombre de Mach. Discuter de l'importance du groupement FM_a / K_s et comparer les performances des deux avions ci-dessous (on pourra envisager le rapport $\frac{M_1}{M_2}$ constant).

| | Consommation spécifique K_s | Finesse | Nombre de Mach |
|---------------------------------|-------------------------------|---------|----------------|
| Avion de ligne type Airbus A320 | 0,65 | 19 | 0,83 |
| Avion de chasse type Mirage F1 | 2,5 | 3,5 | 2 |

D - Modèle de Newton ; à la recherche de la surface de moindre résistance à l'avancement.

Le but de ce modèle élémentaire consiste à mettre en évidence une force de frottement en kV^2 à partir d'un modèle microscopique naïf (on ne tient pas compte de la viscosité et on suppose que seules les particules entrant en collisions avec le solide sont affectées par son mouvement), puis à calculer la force de frottement totale. Enfin il s'agit de déterminer la surface de révolution de base donnée, offrant la plus faible résistance au mouvement.

Choc de particules sur une surface

44) Une surface plane S_0 est fixe dans un référentiel galiléen du laboratoire. On désigne par Ox un axe perpendiculaire à cette surface. Un faisceau de particules identiques, de même masse m , animées d'une même vitesse \vec{V} parallèle à Ox se dirige vers S_0 . On désigne par n le nombre de particules par unité de volume de ce faisceau incident, et on suppose le choc sur S_0 élastique.

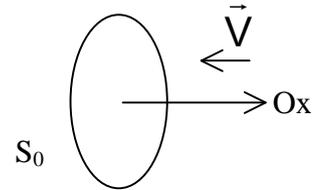


Figure 13

a) Montrer que les chocs des particules sur S_0 produisent sur cette surface une force de la forme : $\vec{F}_1 = -CS_0V^2\vec{e}_x$ où C est une constante dont on donnera l'expression en fonction de n , m , puis en fonction de la masse volumique ρ du faisceau incident de particules.

b) On considère désormais le cas où la normale \vec{n} à S_0 fait l'angle α avec la direction du faisceau de particules incident. Les chocs des particules sur S_0 sont toujours supposés élastiques, et la réflexion spéculaire.

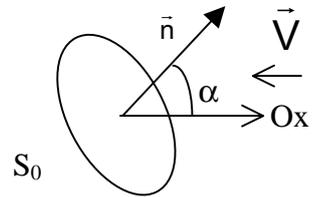


Figure 14

En adaptant le calcul de la question précédente, montrer que la force s'exerçant sur S_0 s'écrit maintenant : $\vec{F}_2 = -CS_0V^2 \cos^2 \alpha \vec{n}$.

c) On place successivement dans le flux de particules décrit précédemment :

- un disque d'axe Ox et de rayon R , perpendiculaire au flux incident de particules,
- une sphère de même rayon R que le disque.

Les chocs des particules sur ces deux types de surfaces sont supposés élastiques et on désigne par \vec{F}_3 et \vec{F}_4 les forces subies respectivement par le disque et par la sphère du fait

des chocs. Calculer le rapport : $\frac{\|\vec{F}_4\|}{\|\vec{F}_3\|}$.

d) On considère que le flot de particules tombe sur une surface de révolution d'axe Ox . Par symétrie, la force de pression due aux chocs est portée par Ox et dirigée suivant Ox négatif : $\vec{F} = F_x\vec{e}_x$ avec $F_x < 0$. Soit dS un petit élément de surface et α l'angle que fait la normale à cet élément de surface avec la direction des particules incidentes.

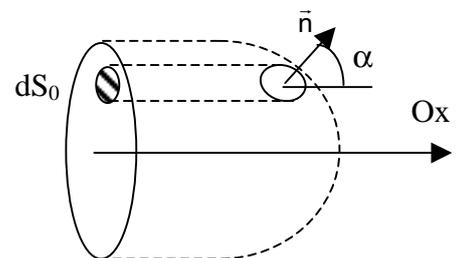


Figure 15

Exprimer la contribution dF_x de dS à F_x en fonction de α, C, V et dS_0 , aire de la projection de dS sur le plan yOz .

Déterminer F_x dans le cas où la surface est un cône de révolution de hauteur H dont la base est un disque de rayon R . Comment choisir H , à R donné, pour minimiser $|F_x|$? Commenter.

Un premier problème d'extremum.

45) La surface d'un solide de révolution d'axe Ox est définie par sa courbe méridienne $y(x)$. Cette surface est soumise au flux de particules présenté à la question précédente. On note θ l'angle non orienté que fait la tangente à la courbe cherchée avec l'axe Ox .

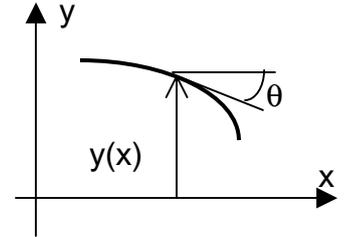


Figure 16

a) Montrer que : $\|\vec{F}\| = CV^2 2\pi \int y \cdot \sin^2 \theta dy$.

b) On considère un cône de révolution tronqué s'appuyant sur un disque de rayon R et d'axe Ox , de demi-angle au sommet θ , et de hauteur H . On cherche à déterminer la valeur θ_m de θ qui minimise le module de la force de traînée quand ce cône tronqué est soumis au flux incident de particules décrit dans les questions précédentes. On désigne par R_1 le rayon de la petite base du cône.

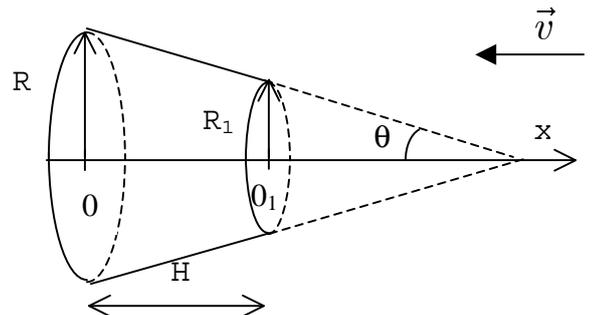


Figure 17

Relier R, R_1, H et $\tan(\theta)$.

c) Montrer que la force totale due aux chocs sur le cône tronqué se met sous la forme :

$$\vec{F}_5 = -C\pi R^2 V^2 g(\theta) \cdot \vec{e}_x \text{ avec } g(\theta) = 1 + p^2 \sin^2(\theta) - p \cdot \sin(2\theta)$$

avec $p = \frac{H}{R}$ un paramètre fixé. En déduire que la valeur θ_m de θ cherchée vérifie :

$$\cotan(2\theta_m) = p / 2.$$

d) Quelle devrait être la valeur optimale de θ pour un cône très mince, $H \ll R$?

e) Dans le cas $H = R$, pour la valeur optimisée de θ , déterminer le module de F_x . Le comparer à celui obtenu pour la sphère de rayon R .

Mise en place du problème général : la surface de moindre résistance.

46) Le but consiste à préciser la forme que doit avoir la courbe méridienne dans le cas général afin de minimiser la force due aux chocs des particules, la base sur laquelle s'appuie cette courbe et son encombrement suivant Ox étant imposés.

a) On suppose que x et y sont définis de manière paramétrique à partir d'un paramètre t donné : $x = x(t)$ et $y = y(t)$.

Montrer finalement que : $\|\vec{F}\| = CV^2 2\pi \int f(y, \dot{x}, \dot{y}) dt$ et exprimer la fonction f en fonction

de où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

b) Pour une base circulaire de rayon $y_0 = R$ donné, et un encombrement H donné, l'allure de la surface cherchée est la suivante :

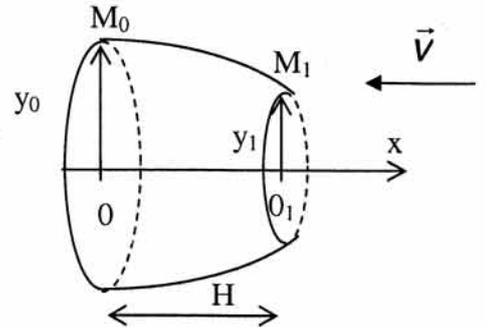


Figure 18

Cette surface se termine, de manière surprenante par un disque de rayon y_1 non nul, alors que l'on pouvait s'attendre à ce que cette surface se termine en pointe. Pouvez-vous expliquer qualitativement, pourquoi il n'est pas gênant pour l'optimisation de la surface, que celle-ci se termine par un disque et non une pointe.

c) Existe-t-il un argument physique général permettant d'affirmer que, dans la mesure où une surface optimale existe, y_1 / y_0 soit une fonction de p ?

d) En formant $\frac{dy}{dx}$, donner l'interprétation géométrique du paramètre q défini par :

$q = \cotan(\theta)$, où θ est l'angle non orienté que fait la tangente à la courbe méridienne avec l'axe Ox. En déduire qu'on peut choisir astucieusement le point M_1 correspond à la valeur $q = 1$ du paramètre q (on pourra s'inspirer de la question 46d).

e) On rappelle qu'une condition nécessaire d'Euler-Lagrange de ce problème variationnel

peut s'écrire par le couple d'équations :
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \end{cases}$$
. Commenter (aucun calcul n'est

demandé).

Citer d'autres exemples de problèmes de calculs variationnels en physique.

Il est remarquable que, malgré les approximations physiques importantes qui sont à la base de ce traitement du problème d'optimisation, les surfaces obtenues sont proches des surfaces optimales utilisées dans des réalisations industrielles et techniques (« nez » du Concorde supersonique, profils des voitures et des TGV).