

UNIVERSITÉ DE PROVENCE, AIX-MARSEILLE I

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Provence, Aix-Marseille I

Spécialité : **Physique**

préparée au laboratoire **Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors
Equilibre**

dans le cadre de l'École Doctorale **Sciences pour l'ingénieur, Mécanique,
Physique, Micro et Nanoélectronique**

présentée et soutenue publiquement
par

Romain Vermorel

le 29 mai 2009

Titre:

Elasticité et fragmentation solide

Directeur de thèse: **Emmanuel Villermaux**
Co-directeur de thèse: **Nicolas Vandenberghe**

Jury

Résumé

Les travaux présentés s'intéressent à plusieurs phénomènes de fragmentation d'objets fragiles, lesquels présentent des motifs de rupture réguliers, suggérant la grande influence de la réponse élastique du matériau sur la distribution finale des fragments. Ainsi nous nous intéressons en premier lieu à l'instabilité de flambage dynamique consécutive à un impact axial sur une barre. Cette instabilité, également observée lors du repliement d'un élastique, sélectionne une longueur d'onde bien définie. Dans le cas d'un matériau fragile, si localement les contraintes occasionnées sont supérieures à la contrainte de rupture, la barre se brise avec une taille caractéristique de ses fragments corrélée à la longueur d'onde de flambage. Par ailleurs, nous étudions le réseau de fissures radiales généré par un impact sur une plaque fragile. La répartition des fissures est régulière et nous observons une sélection de leur nombre en fonction de la vitesse d'impact. Afin de mieux comprendre le mécanisme de sélection, nous avons recours à des systèmes expérimentaux plus simples, comme des membranes élastiques ou fragiles, qui présentent une phénoménologie analogue. Ainsi, nous documentons l'instabilité de flambage dynamique survenant après un impact sur une membrane élastique, de même que nous abordons le problème de la perforation statique d'une feuille fragile et sa fragmentation en pétales.

Abstract

The present work investigates several solid fragmentation phenomena involving regular failure patterns, which suggests that the elastic response of the material directly affects the fragments size distribution. As a first example, we study the dynamic buckling instability consecutive to an axial impact on a rod, or occurring during the recoil of a stretched rubber band. This instability provokes the bending of the rod with a well defined wavelength. Thus, in the case of brittle materials, if the stress rises locally above a critical value, the rod breaks with a typical fragment size which relates to the buckled wavelength. In addition, we investigate the radial cracks patterns subsequent to an impact on a brittle plate. These breaking patterns feature regular spacing between the cracks, which number depends on the impactor incident velocity. In order to better understand the selection mechanism, we focus on simpler experimental models, such as elastic and brittle membranes, which involve a similar phenomenology. Therefore, we study the dynamic buckling instability consecutive to an impact on a thin elastic sheet, as well as the static perforation and *petalling* of a brittle film.

Remerciements

Je tiens à remercier mes directeurs de thèse, Emmanuel Villermaux et Nicolas Vandenberghe pour leur soutien, ainsi que pour la confiance qu'ils m'ont accordée tout au long de cette thèse. Je me réjouis d'avoir travaillé à leurs côtés dans une ambiance toujours détendue, mais propice à un travail de qualité.

Par ailleurs, j'adresse un grand merci au personnel et techniciens de l'atelier de mécanique de l'IRPHE : Jacky Minelli, Raymond Vaudo, Mathieu Roy, Franck Dutertré, Eric Golubic, Hubert EKongolo N'kake et Eric Portal, sans l'expertise et la patience desquels je n'aurais jamais pu mettre au point des dispositifs expérimentaux efficaces.

Je remercie également les personnes que j'ai côtoyées au cours de ces années passées au laboratoire : Wietze Herreman, Henri Lhuissier, Guillaume Lavorel, Xavier Riedinger, Julien Chambarel, Romain Lagrange, Julien Dubois, François Caillé, Julien Touboul, Clément Roy, Laurent Grare, Xabier Oyharçabal, Nicolas Boulanger, Simona Bodéa, Julien Deschamps, Virginie Duclos, Benjamin Bossa, Christophe Almarcha, Athéna Wangher, Pierre-Yves Passagia, Bloën Metzger, Luis Parras, Patrice Meunier, Tetyana et Lin Jiang, Arnaud Antkowiak, Claire Souilliez, Jérôme Duplat, et ainsi que tous les chercheurs et étudiants avec qui j'ai pu discuter.

De manière plus générale, je remercie l'ensemble des personnels de l'IRPHE qui contribuent à la bonne ambiance et aux bonnes conditions de travail qui y règnent.

Enfin, je remercie la Délégation Générale à l'Armement, ainsi que l'Agence Nationale de la Recherche, pour le soutien financier dont j'ai bénéficié durant ma thèse.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Remerciements	v
Table des matières	vii
1 Introduction	1
2 Du repliement d'un élastique tendu à la fragmentation d'une barre fragile	7
1 Introduction	7
2 <i>Rubber band recoil</i>	9
3 Impact axial sur une barre fragile	27
3.1 Influence de l'instabilité de flambage dynamique sur les patrons de brisure	27
3.2 Prise en compte de l'aspect probabiliste du phénomène de brisure	29
4 Conclusion	31
3 Impacts sur des plaques fragiles	33
1 Introduction	33
2 Présentation de l'expérience	34
2.1 Dispositif Expérimental	34
2.2 Matériaux utilisés	37
3 Eléments de théorie	38
3.1 Réponse d'une plaque élastique à un impact ponctuel	38
3.2 Estimation du seuil de brisure	39
3.3 Origine du motif de brisure en fissures radiales	42
3.4 Résumé des remarques théoriques	43
4 Impacts sur des plaques de PMMA	44
4.1 Fragmentation avec fissures radiales	44
4.2 Fragmentation en fissures radiales et azimutales	49
4.3 Fragmentation aux grandes vitesses d'impact	54
5 Impacts sur des plaques de verre	54
5.1 Fragmentation sans structures radiales	55
5.2 Fragmentation avec fissures radiales	56
6 Conclusion	61
4 Impacts sur des membranes élastiques	63
1 Introduction	63
2 <i>Impacts on thin elastic sheets</i>	65

3	Conclusion	85
3.1	Lien avec la fragmentation des plaques fragiles	85
3.2	Intérêt de l'étude	86
5	Perforation d'une feuille fragile et fragmentation en pétales	87
1	Introduction	87
2	Présentation de l'expérience	88
2.1	Dispositif Expérimental	88
2.2	Matériaux utilisés	90
3	Phénoménologie	93
3.1	Perforation de feuilles fragiles avec n_0 pré-fissures	94
3.2	Perforation de feuilles fragiles sans pré-fissures	104
3.3	Cas du papier soie	106
4	Théorie	107
4.1	Déformation de la feuille au contact du cône	107
4.2	Géométrie du motif de brisure en pétales	108
4.3	Sélection du nombre de pétales n	114
5	Discussion	120
5.1	Branchement des fissures dans les cas $n < n_{st}$	120
5.2	Choix du mode d'avancée radiale des fissures et évolution d'un motif non uniforme	121
6	Conclusion	124
6.1	Résumé de l'étude	124
6.2	Lien avec la fragmentation des plaques fragiles	124
6.3	Intérêt de l'étude	125
6	Conclusion	127
A	Calcul de l'énergie élastique d'une feuille fragile perforée par un cône	129
	Bibliographie	131

Chapitre 1

Introduction

A la fin des années soixante, le professeur P.V. Danckwerts, *Shell Professor* à l'université de Cambridge, avait coutume de souligner "*le manque d'une recherche expérimentale de qualité sur les phénomènes de broyage*". Aujourd'hui, cette remarque demeure d'actualité tant la recherche académique délaissa les problèmes de fragmentation solide. Depuis les travaux de C.E. Inglis [1] et A.A. Griffith [2], et la théorie des microfissures expliquant la fragilité des verres, des progrès très importants furent réalisés dans la compréhension de la propagation d'une fissure isolée [3]. De même, de nombreuses études, classiques¹ ou récentes ([5], [6]), documentent l'aspect statistique des phénomènes de brisure en se focalisant, entre autres, sur la distribution des fragments d'un objet sollicité jusqu'à sa rupture. Toutefois, les liens entre ces deux niveaux de descriptions restent flous. Pourtant, la compréhension des processus de fragmentation, depuis la sollicitation de l'objet jusqu'à sa brisure et la distribution de ses fragments, revêt une grande importance dans nombres d'applications. Cela est notamment le cas pour l'industrie minière ou l'industrie des matériaux abrasifs, pour qui, le contrôle de la taille de grain, ou encore *grit*, constitue un enjeu capital lors du broyage des matières premières. Ainsi, il est étonnant que les phénomènes inhérents à l'industrie du broyage, vieille de plusieurs siècles, n'aient fait l'objet d'études scientifiques plus systématiques.

Entre le constituant insécable, imaginé par Leucippe et Démocrite cinq siècles avant J.C, et des morceaux comparables à son propre volume, en fonction de la manière dont il est sollicité, un objet fragile peut se briser en fragments dont les dimensions sont largement distribuées (voir figure 1.1). Pour remonter à la distribution du nombre et des tailles de fragments, dans la plupart des cas, une étude statistique de l'ouverture des défauts dans le matériau ne suffit pas. Par conséquent, une approche globale apparaît comme nécessaire, prenant en compte le champ de déformation élastique préalable à la rupture, ainsi que la dynamique des fissures et l'aspect statistique introduit par les réarrangements du matériau à l'échelle microscopique. Ainsi, l'étude rigoureuse d'un phénomène de brisure, menant idéalement à la prédiction de la distribution des fragments, nécessite des compétences variées et peut s'avérer laborieuse. Plus particulièrement, la description de la réponse élastique aux sollicitations exercées est trop souvent délaissée lorsqu'il s'agit d'étudier

¹Un tour d'horizon des problèmes statistiques de fragmentation, traités par N.F. Mott ou inspirés par les travaux de ce dernier, est réalisé dans l'ouvrage de D. Grady, *Fragmentation of Rings and Shells : The Legacy of N.F. Mott* [4].

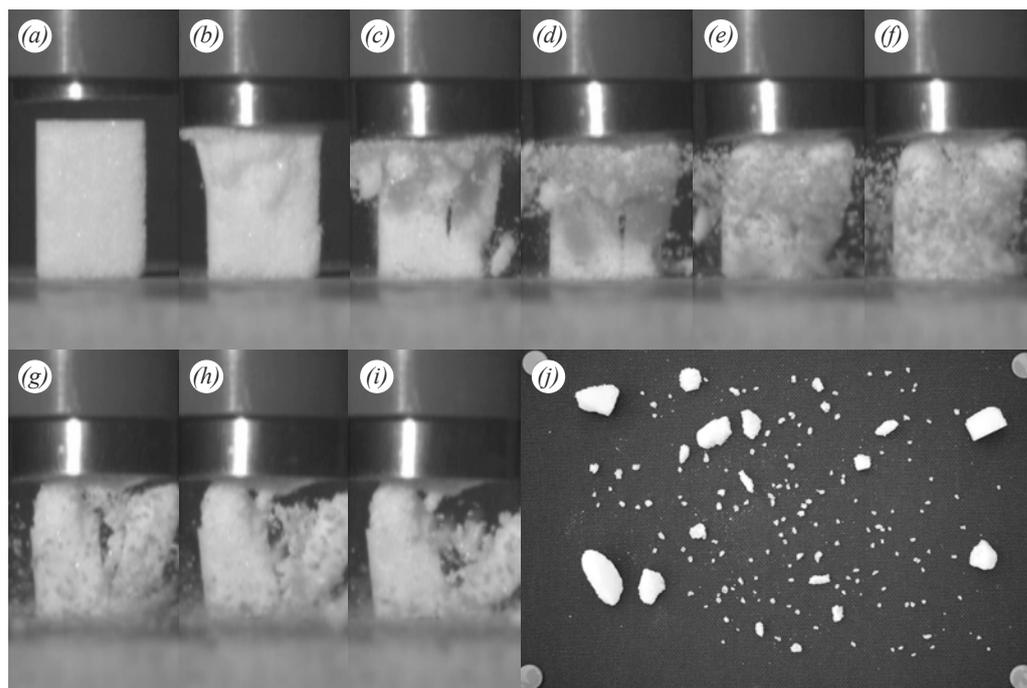


FIG. 1.1 – (a) à (i) Impact d’une masse rigide sur un morceau de sucre. (j) Seuls les morceaux au delà d’une certaine taille sont récoltés. On observe une large distribution de tailles alors même que les plus petits fragments ne sont pas présentés.

les distributions de tailles de fragments. Pourtant, nombreux sont les phénomènes de fragmentation exhibant des motifs de brisure réguliers et reproductibles, suggérant la grande influence du problème élastique initial sur le pattern de rupture final. Ainsi, des travaux récents sur des problèmes de fragmentation consacrent une grande importance aux phénomènes élastiques conduisant à la brisure et à une documentation expérimentale précise de celle-ci ([7], [8]), et ce, avec succès. Ce type d’approche s’inscrit dans la démarche entreprise dans les travaux de thèse présentés.

Le parti pris des travaux conduits au cours de cette thèse consiste en l’étude de problèmes de fragmentation solide présentant des distributions de fragments nettement influencées par la réponse élastique du matériau. Ceci est largement le cas lors de la brisure d’une barre fragile soumise à un impact axial : sous l’effet de la compression générée par le choc à l’une de ses extrémités, la barre subit une instabilité élastique connue sous le nom de flambage dynamique. Ainsi, elle se déforme dans la direction transverse jusqu’à rompre en plusieurs fragments, dont les tailles sont fortement corrélées à la longueur d’onde sélectionnée par l’instabilité. Par ailleurs, un impact transverse sur une plaques fragile, en fonction de la vitesse du projectile, donne naissance à un motif de rupture présentant des fissures radiales. Si, initialement, ces fissures sont distribuées aléatoirement, elles évoluent ultérieurement vers un pattern régulier, suggérant l’importance des répartitions des contraintes élastiques au sein de la plaque. La démarche de la thèse consiste en une documentation expérimentale soignée ainsi qu’en une analyse simple, mais exhaustive, de plusieurs phénomènes physiques liés à la fragmentation d’objets fragiles. En outre, nous mettons l’accent sur les problèmes d’élasticité inhérents aux processus de brisure, même

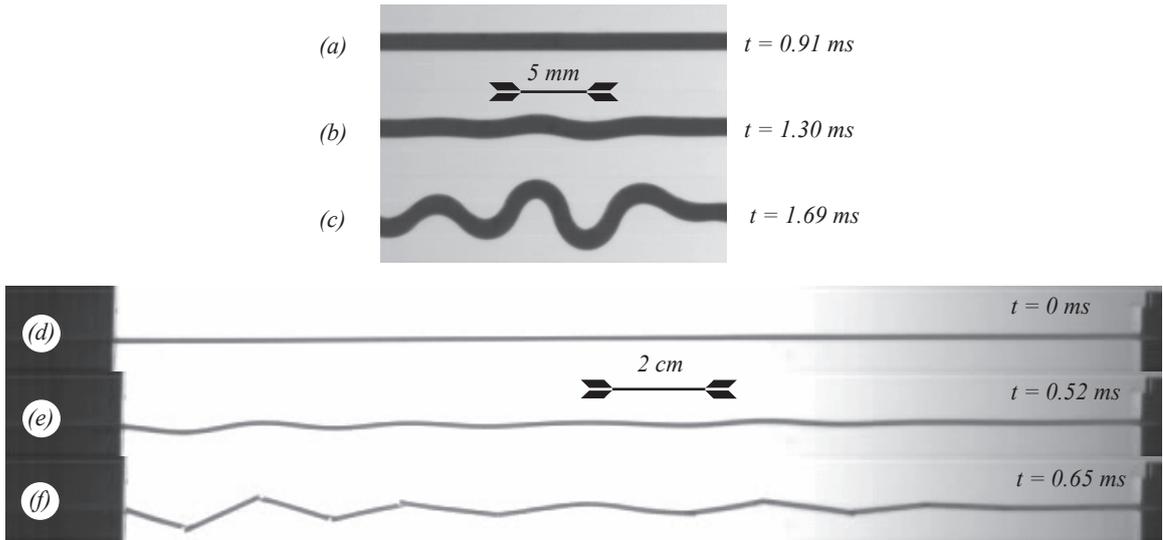


FIG. 1.2 – (a) à (c) Repliement d'un élastique tendu par ses deux bouts et relâchés simultanément. L'origine des temps coïncide avec le lâché des extrémités tendues. Le croisement des deux fronts de détente au centre de l'élastique résulte en une contrainte de compression qui déclenche une instabilité de flambage dynamique. (d) à (f) Impact d'une masse rigide sur un spaghetti. La masse du projectile est de 400 g et sa vitesse d'impact s'élève à $5.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Le spaghetti a un diamètre de 1.1 mm et une masse de 0.37 g. L'origine des temps coïncide avec l'instant de l'impact. La compression générée par l'impact déclenche une instabilité de flambage dynamique menant à la brisure.

si cela nécessite parfois l'utilisation de systèmes expérimentaux plus simples, différenciant du système initial mais exhibant des comportements analogues. C'est par exemple le cas d'un élastique, utilisé comme système modèle pour documenter l'instabilité de flambage dynamique menant à la fragmentation d'une barre fragile (voir figure 1.2). De même, traiter directement le problème des fissures radiales dans une plaque fragile s'avérant très complexe, nous nous sommes intéressés aux impacts sur des membranes élastiques, ainsi qu'à l'évolution des fissures radiales lors de la perforation d'un film fragile (voir figure 1.3).

En ce qui concerne les modèles théoriques développés, nous faisons le choix d'exploiter au maximum des résultats déductibles de théories classiques. Par exemple, la réponse d'une barre soumise à un impact axial est décrite à partir de l'équation des poutres d'Euler-Bernoulli. Si on note ρ la masse volumique de la barre, S sa section, E son module d'Young et I le moment d'inertie en flexion, cette équation s'écrit :

$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + EI \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} = 0 \quad (1.1)$$

où T est la force de compression due à l'impact. Dès lors, il suffit de connaître la force axiale appliquée à la barre pour faire l'analyse de sa stabilité. Dans le cas d'un impact longitudinal, la théorie classique des impacts sur les barres de M. Saint-Venant [9] permet d'obtenir l'expression de la force : $T \simeq ESV/c$ où V est la vitesse

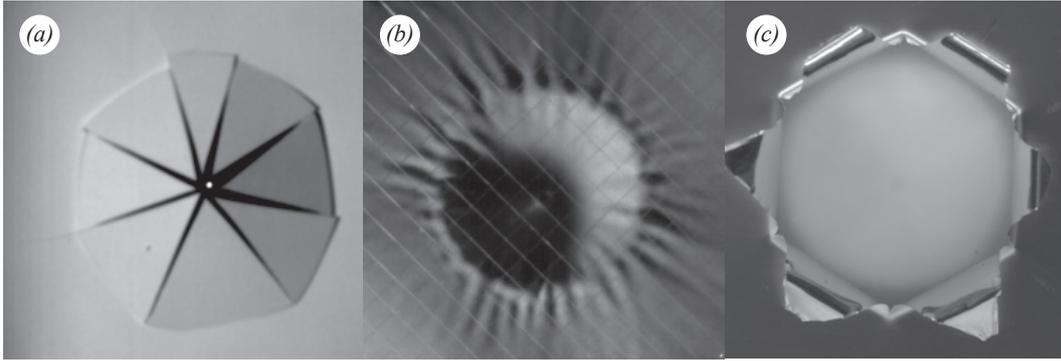


FIG. 1.3 – (a) Impact d’une bille d’acier sur une plaque en PMMA. La bille est lancée à 60 m.s^{-1} et la plaque possède une épaisseur de 1 mm. La taille de l’image correspond à 6 cm. L’image correspond à un temps d’environ 0.5 ms après l’impact. (b) Impact d’une bille d’acier sur une membrane en latex. La bille est lancée à 5.2 m.s^{-1} et la plaque possède une épaisseur de 1 mm. La taille de l’image correspond à 7 cm. L’image correspond à un temps d’environ 1.9 ms après l’impact. (c) Perforation d’une feuille de papier aluminium par un cône rigide. Le rayon de pénétration du cône vaut 9.6 mm, l’épaisseur de la feuille est de $20 \mu\text{m}$. La taille de l’image correspond à 2.7 cm

d’impact et c la vitesse du son dans le matériau. Ainsi le problème est bien défini et une analyse de stabilité linéaire aboutit à la caractérisation de la longueur d’onde de flambage et du temps de croissance, que l’on relie sans mal aux paramètres :

$$\lambda \sim d\sqrt{\frac{c}{V}}, \quad \tau \sim \frac{d}{V} \quad (1.2)$$

où d est le diamètre de la barre. Nous montrerons que cette approche simple permet de prédire de manière réaliste la dynamique d’une barre soumise à un impact ou d’un élastique initialement tendu puis soudainement relâché. De même, ce type de raisonnement est appliqué au traitement de l’instabilité de flambage dynamique observée après un impact sur une membrane élastique. Si les difficultés intrinsèques à la géométrie bidimensionnelle rendent les calculs plus compliqués, le principe demeure identique : les déformations transverses de la membranes sont couplées aux déformations dans son plan et, par conséquent, on doit établir le lien entre le champ de contrainte dans le plan et la vitesse d’impact du projectile.

Par ailleurs, pour décrire l’évolution d’un réseau de fissures radiales dans une feuille fragile, nous utilisons simplement le critère de Griffith [2] qui lie la variation de l’énergie élastique du système à l’avancée des fissures. Ce critère est fondé sur le principe de conservation de l’énergie du système, celle-ci ne devant pas varier durant la propagation des fissures. Si on note U_e l’énergie élastique de la feuille d’épaisseur h , Γ l’énergie surfacique d’avancée des fissures et l leur longueur respective, on a pour un réseau de n fissures :

$$\frac{\delta U_e}{\delta l} = -n\Gamma h \quad (1.3)$$

Il suffit alors d’étudier le champ de contrainte et de déformation de la feuille pour obtenir l’expression de U_e et par conséquent déterminer la topologie du réseau de fissures radiales à l’aide de l’équation 1.3.

Le choix d'une description théorique simple s'explique donc par la volonté d'obtenir, dans la mesure du possible, des résultats analytiques clairs et de déterminer de manière convaincante les mécanismes mis en jeu dans les phénomènes étudiés.

Ainsi, nous nous intéressons dans un premier temps à un problème de fragmentation d'un objet unidimensionnel : l'impact axial d'une barre fragile. Nous abordons le problème en documentant l'instabilité de flambage dynamique qui intervient lors du repliement d'un élastique tendu. Dans le cas d'une barre fragile, cette même instabilité conduit à la rupture de l'objet. Ensuite, le problème d'un impact sur une plaque fragile fait l'objet d'une étude expérimentale, dont le compte rendu présente les arguments qui serviront de base à un futur modèle théorique. Par ailleurs, dans le souci d'une meilleure compréhension des phénomènes observés dans le cas des plaques fragiles, deux autres travaux sont présentés : l'étude de la réponse d'une membrane élastique à un impact ainsi que l'étude de la fragmentation en pétales d'un film fragile perforé. Si chacune des études présente des intérêts qui lui sont propres et qui la rendent originale, le lien avec les phénomènes de fragmentation auxquels elles se rapportent est systématiquement mis en évidence.

Chapitre 2

Du repliement d'un élastique tendu à la fragmentation d'une barre fragile

1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous nous intéressons à l'instabilité de flambage dynamique qui survient lorsqu'une barre subit une compression axiale transitoire. Ainsi, à la suite d'un impact axial, une barre élastique est soumise à une contrainte de compression qui s'établit au passage d'un front d'onde, né du choc à l'une de ses extrémités. Si la contrainte est supérieure à la contrainte critique de flambage, la configuration rectiligne de la barre devient alors instable, si bien que cette dernière se déforme latéralement avec une longueur d'onde bien définie. Dans le cas d'un élastique initialement tendu, le flambage dynamique conduit au repliement de celui-ci. Dans le cas d'un matériau fragile, cette instabilité peut mener à la brisure.

Ainsi, une connaissance approfondie de cette instabilité apparaît comme indispensable à la bonne compréhension de la fragmentation d'une barre sous impact. Dès lors, un ruban en caoutchouc ou en latex naturel apparaît comme un système expérimental tout indiqué. En effet, la faible vitesse du son dans le matériau ($c \sim 40 \text{ m.s}^{-1}$) ainsi que son comportement élastique, conservé même pour des grandes déformations (de l'ordre de 100%), en font un candidat idéal pour une étude expérimentale via des techniques d'imagerie rapide. Par conséquent, l'utilisation d'une caméra rapide permet de distinguer chacune des étapes menant à l'instabilité de flambage dynamique d'un élastique.

Des travaux plus anciens (1965) furent réalisés sur le sujet par H.E. Lindberg [10]. Toutefois, dans l'impossibilité d'observer le phénomène de manière précise, comme nous le permet aujourd'hui une caméra à haute cadence d'acquisition, il ne pût comprendre les écarts entre ses mesures et la théorie. Considérons un élastique, initialement tendu, dont l'une des extrémités est solidement encastée dans un étai. Lorsque le bord libre est relâché, un front de relaxation se propage vers l'extrémité fixe à la vitesse du son c dans le matériau. Dans son sillage, ce front de relâchement entraîne la région relaxée avec une vitesse des points matériels V qui est une fraction

de c . Lorsque le front de relaxation atteint l'extrémité fixe, l'élastique est relâché sur toute sa longueur et se déplace à la vitesse V en direction de la fixation. Dès lors, la situation est équivalente à celle d'un impact axial. Un front de compression se propage en sens inverse, depuis l'extrémité fixe vers le bord libre, en laissant derrière lui une zone comprimée. Sous l'effet de cette contrainte de compression, la région concernée de l'élastique devient instable et une longueur d'onde de flambage bien définie est observée.

Les travaux présentés dans cette partie ont pour but de décrire les différentes étapes qui conduisent à l'instabilité de flambage dynamique d'un élastique. En bon accord avec les expériences, le modèle théorique prédit une longueur d'onde de flambage qui dépend uniquement de l'élongation initiale et de l'épaisseur de l'élastique. De plus, l'influence du milieu extérieur est également analysée. L'étude met en évidence l'effet de la viscosité d'un fluide environnant sur la longueur d'onde de l'instabilité. Ce travail a fait l'objet d'une publication insérée directement dans le chapitre. Par ailleurs, nous ferons un bref résumé des résultats déjà obtenus sur la fragmentation d'une barre fragile sous impact. En outre nous établirons le lien entre ce phénomène et le repliement de l'élastique.

Rubber band recoil

BY R. VERMOREL, N. VANDENBERGHE* AND E. VILLERMAUX†

*IRPHE, Aix-Marseille Université, CNRS, 49 rue Joliot-Curie,
F-13384 Marseille Cedex, France*

When an initially stretched rubber band is suddenly released at one end, an axial-stress front propagating at the celerity of sound separates a free and a stretched domain of the elastic material. As soon as it reaches the clamped end, the front rebounds and a compression front propagates backward. When the length of the compressed area exceeds Euler critical length, a dynamic buckling instability develops. The rebound is analysed using Saint-Venant's theory of impacts and we use a dynamical extension of the Euler–Bernoulli beam equation to obtain a relation between the buckled wavelength, the initial stretching and the rubber band thickness. The influence of an external fluid medium is also considered: owing to added mass and viscosity, the instability growth rate decreases. With a high viscosity, the axial-stress front spreads owing to viscous frictional forces during the release phase. As a result, the selected wavelength increases significantly.

Keywords: rubber band; elastic instability; dynamic buckling

1. Introduction

In his classical treatment of the *elastica*, Euler (1744) proved that for a given length and for given boundary conditions, there exists a critical load at which a rod buckles. Among the different possible bent shapes, only the one with the smallest number of inflections is stable, i.e. the shape corresponding to the fundamental flexural mode (e.g. Love 1944). Thus, the only characteristic length associated with the buckling instability is the length of the rod itself.

However, when a compressive load several times higher than the Euler critical force is suddenly applied to an *elastica* at rest, the buckling instability develops dynamically and a characteristic wavelength is selected. Lindberg (1965) studied the growth of the different flexural modes of an Euler–Bernoulli beam suddenly compressed. The theory predicts that the most amplified wavelength decreases like the inverse square root of the compression strain. He also devised an ingenious way to determine the buckled wavelength from experiments on metallic elastic beam and on rubber bands. In the case of the metallic beam, he found a fair agreement with theory, while in the case of the rubber band, discrepancies were stronger: the measured wavelength was 70% higher than predicted for reasons that were not elucidated.

* Author for correspondence (nvdb@irphe.univ-mrs.fr).

† Also at Institut Universitaire de France.

Electronic supplementary material is available at <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2006.1781> or via <http://www.journals.royalsoc.ac.uk>.

The aim of the present work is to study in detail the dynamic buckling instability responsible for the recoil of a rubber band. Indeed, the rubber band is an interesting system for the study of dynamic buckling because the characteristic speed of sound in rubber is moderate (about 40 m s^{-1}) and strains and displacements can be large. It also represents a simple case study of more general situations where flexural and compression waves are coupled, as those encountered in the related problem of brittle rod fragmentation under impact (Gladden *et al.* 2005). The question is envisaged in its most general setting, including the influence of a surrounding medium as we perform experiments in air and in liquids, namely water and water–glycerol mixtures to investigate the effect of added mass and fluid viscosity.

2. Experimental set-up

We first consider the recoil of a cantilever rubber band. One end of the rubber band is firmly clamped on the experimentation table. The operator holds the free end, stretches the elastic to the desired length and releases it suddenly. A set-up was also designed to stretch and release the rubber band from both ends simultaneously. A thin fishing line is glued to both ends of the elastic in such a way that the line and the elastic material form a loop. This loop is placed around two pulleys. Thus, the operator can stretch and release the rubber band by pulling and dropping the fishing line.

The elastics were cut from natural latex rubber sheets of thicknesses from 0.254 up to 1.270 mm. The length and width of the rubber bands are $\ell_0 = 150 \text{ mm}$ and $b = 4 \text{ mm}$. The measurement of the force–extension curve reveals that in the range of stretching between 0 and 100%, the elastic behaviour of the rubber remains linear (within 3%) with the Young modulus $E = 1.5 \text{ MPa}$ and no significant hysteretic behaviour or stress softening of the rubber (Bouasse & Carrière 1903; also called the Mullins effect after Mullins 1947) were observed. For higher stretching, significant deviation from the ideal Hookean behaviour was observed and in most experiments, the stretching has been limited to the range 0–100%. The density of the rubber is $\rho = 990 \text{ kg m}^{-3}$ and thus the nominal wave speed for longitudinal disturbances is $c = (E/\rho)^{1/2} = 39 \text{ m s}^{-1}$.

We used a Phantom V5 high-speed video camera to record movies at typical frame rates of 10 000–30 000 frames per second. The rubber band is illuminated from behind using a white light source and a diffusing screen or by direct lighting using a black or white background. Regularly spaced marks are drawn on the elastic to follow the motion of the material points.

To study the influence of the external medium, experiments were also conducted with the set-up immersed in a tank filled with water or with water–glycerol mixtures of controlled viscosity. Viscosities were measured using a Couette viscosimeter and we used viscosities from $\eta = 1.0 \times 10^{-3}$ (pure water) up to $6.5 \times 10^{-1} \text{ Pa s}$.

3. Recoil of a rubber band in air

(a) Phenomenology

Stretching and releasing a rubber band is a common experience. The typical time-scale of this phenomenon is $\ell_0/c \approx 3.8 \text{ ms}$, hence the use of high-speed imaging. When the tension is suddenly released, a front propagates towards the clamped end

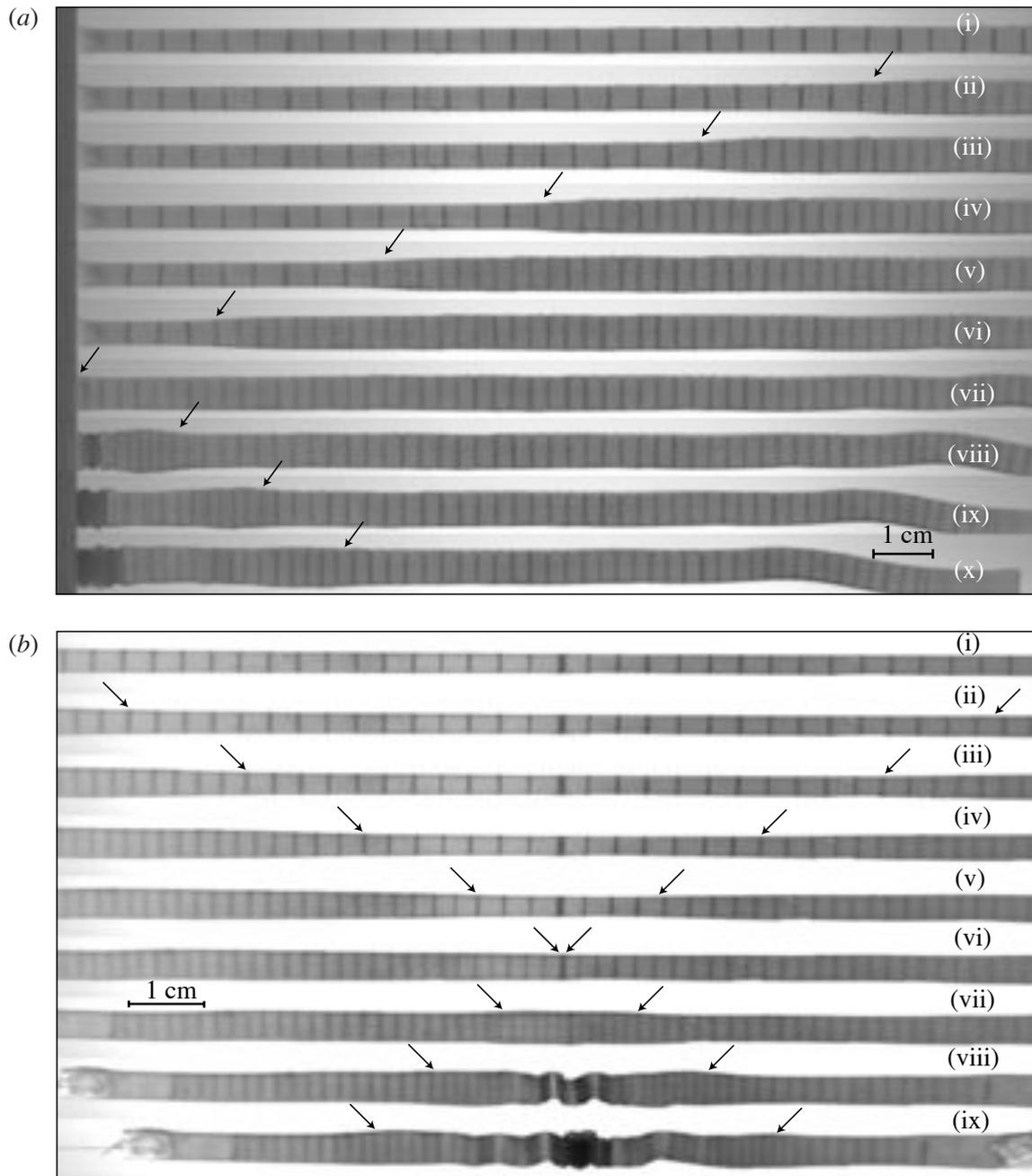


Figure 1. (a) Front propagation in a clamped rubber band with initial stretch $\epsilon_0=1$. (i)–(vi) The front (marked by the arrow) propagates towards the clamped end and drags the free region. (vii) When the front reaches the clamped end, the strain-free rubber band moves towards the clamped end. (viii)–(x) After impact, a compressive front propagates backward and triggers a dynamic buckling instability. Time proceeds in steps of $350 \mu\text{s}$. A movie showing the front propagation is included in the electronic supplementary materials. (b) Fronts propagation in a rubber band simultaneously released from both ends with $\epsilon_0=1$. The two fronts (marked by the arrows) propagate towards the middle of the elastic. (vi) When the fronts cross each other, compressive fronts set out from the middle (vii)–(ix) and trigger buckling. Time proceeds in steps of $320 \mu\text{s}$.

(figure 1a, images (i)–(vi)) at the celerity c in the material. The front separates two regions: a stress-free area between the free end and the front, and a stretched area between the front and the clamped end. As the front propagates, it drags the free region down to the clamped end at velocity V , which is a fraction of c .

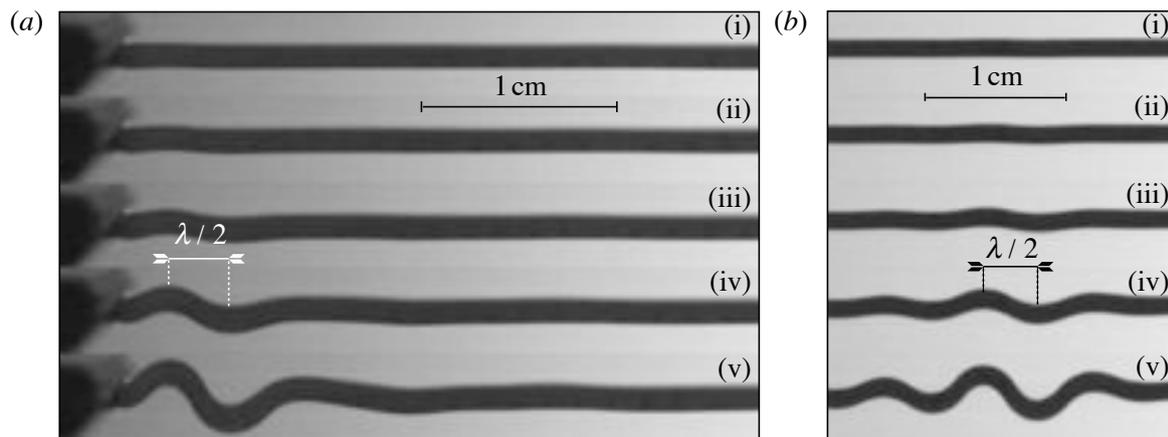


Figure 2. (a) Early stages of the dynamic buckling of a clamped rubber band with $\epsilon_0 = 0.3$. Time proceeds in steps of $117 \mu\text{s}$. (b) Early stages of the dynamic buckling of a rubber band simultaneously released from both ends with $\epsilon_0 = 0.2$. Time proceeds in steps of $130 \mu\text{s}$. A movie showing the dynamic buckling is included in the electronic supplementary material.

When the front reaches the clamped end, the whole rubber band is free, moving towards the table at velocity V (figure 1*a* (vii)). The configuration is then equivalent to a free rubber band moving at velocity V impacting a rigid surface (see Saint-Venant & Flamant (1883) and references therein). A compressive front propagates towards the free end at speed c in the frame of the rubber band (figure 1*a* (viii)–(x)). Between the clamped end and the front, the elastic is compressed. As soon as the compressive front has travelled a critical distance from the clamped end, the compressive stress is applied to a region long enough to trigger off a buckling instability. The elastic starts to bend with a well-defined wavelength (figure 2 (iv)). The first complete half wavelength will be referred to as the half-buckled wavelength. Thereafter, the front propagates towards the free end inducing more bending of the rubber band. Our focus is on the first half wavelength only because the subsequent dynamics becomes more complicated. In particular, near the clamped end, the transverse displacement resulting from the buckling is coupled to the propagation of the longitudinal wave.

To check the influence of the boundary conditions on the dynamics, we performed a similar experiment with a rubber band simultaneously released from both ends. Two fronts propagate towards the middle of the elastic. When the fronts reach the middle, the rubber band is stress-free but its two halves are moving with opposite velocities V and $-V$. The configuration is then equivalent to the classical problem of two rods impacting each other. Compressive fronts propagate away from the junction (i.e. the middle of the rubber band), triggering the dynamic buckling instability in both sides of the rubber band. Our measurements show that the dynamics is strictly identical to the case of the clamped rubber band for low stretching (less than 50%). For higher stretching, the friction of the fishing line sliding against the axes results in a slight decrease of the velocity of the free regions of the rubber band. Therefore, all the measurements reported in this paper were obtained with the more reliable clamped-free configuration.

(b) Compression front

The rubber band is modelled as a Hookean elastic rod experiencing small strain. We neglect the effect of lateral inertia and we use the small strain

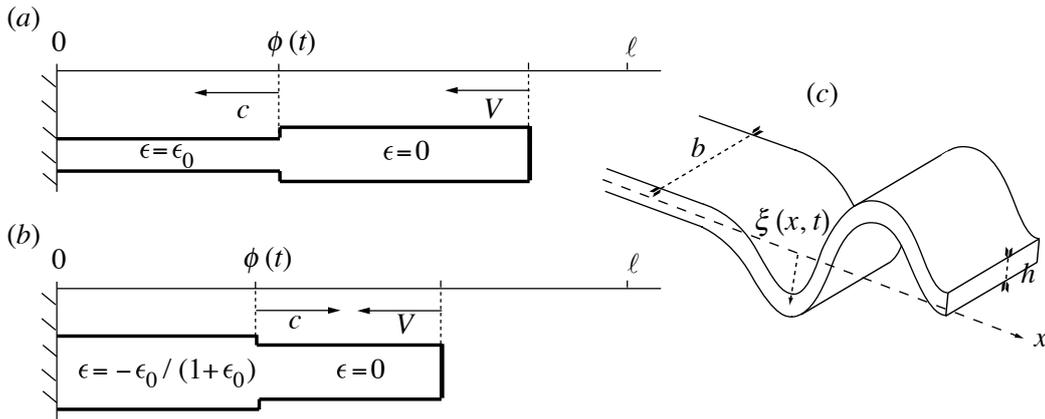


Figure 3. (a) Schematic of the stress-free front propagation. ℓ is the length of the stretched rubber band. ϕ is the position of the front. The stress-free front propagates towards the clamped end at speed of sound c and it drags the free region with a constant velocity V . (b) The rebounding front propagating backward. (c) Schematics of the dynamic buckling of a rubber band. b and h are the width and the thickness of the band, respectively. ξ is the transverse displacement.

hypothesis. Thus, longitudinal perturbations are governed by the linear wave equation with the propagation speed c . A more refined model for the front propagation can be used, but for the range of stretching $\epsilon_0 \leq 1$, the simplest model offers an accurate description of the dynamics (e.g. Mason 1963).

Let ℓ be the length of the stretched rubber band and ℓ_0 its length at rest. The initial strain ϵ_0 is

$$\epsilon_0 = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}. \tag{3.1}$$

The front is a discontinuity that separates a strain-free region and a stretched region in which $\epsilon = \epsilon_0$ (figure 3a). The front propagates at speed c and it reaches the anchor point at time $t_i = \ell/c$. Then the elastic is strain-free and its length is ℓ_0 . V being the speed of the free end, we have $\ell - \ell_0 = -Vt_i$ and thus we obtain that

$$V = -\left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell}\right)c = -\left(\frac{\epsilon_0}{1 + \epsilon_0}\right)c. \tag{3.2}$$

This relation holds for all material points in the free region.

When the front reaches the clamped end, the whole rubber band is strain-free and translates at speed V . Thus, the problem is equivalent to a rubber band impacting a rigid surface at speed V . Let $\zeta(x, t)$ be the longitudinal displacement in the rubber band. x is the coordinate of a material point along the rod with $x=0$ being the anchor point. When the front reaches the $x=0$ position, all the points of the elastic are moving at speed V . At time $t=0$, the front suddenly encounters a $\zeta(0, t)=0$ condition. It rebounds and propagates backward at speed c (in the material frame, i.e. it is propagating at speed $c+V$ in the laboratory frame with $V<0$). The front propagating away from the ‘impact point’ separates a compressed area in which the speed is zero and a stress-free area moving at speed V (figure 3b). At time t , the front has reached the point $x=\phi=ct$ and this point has been displaced by a quantity $\zeta(x, t) = Vt = Vx/c$. Thus, the strain in the compressed area is

$$\epsilon = V/c = -\epsilon_0/(1 + \epsilon_0). \tag{3.3}$$

Behind the rebounding front, the compressive force is given by Hooke’s law

$$T = \sigma bh = -Ebh\epsilon_0/(1 + \epsilon_0), \tag{3.4}$$

where b and h are the width and thickness of the rubber band.

(c) Mode selection

We introduce an equation for the transverse displacement $\xi(x, t)$ (figure 3c) by plugging the above compressive force into the equation describing the dynamics of the bending waves and using Euler–Bernoulli description

$$\rho bh \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + EI \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} = 0, \quad (3.5)$$

where $I = bh^3/12$ is the flexural inertia momentum in the flexion plane.

We look for solutions of the form $\xi(x, t) = \xi_0 \exp(ikx - i\omega t)$. With T constant along the rod, the dispersion relation reads

$$\omega^2 = \frac{EI}{\rho bh} k^2 \left\{ k^2 + \frac{T}{EI} \right\}. \quad (3.6)$$

For a compressive force, T is negative. Unstable modes have wavenumbers in the range 0 to k_c where k_c is the marginal wavenumber,

$$k_c = \sqrt{\frac{|T|}{EI}}. \quad (3.7)$$

The most amplified wavenumber is $k_m = k_c/\sqrt{2}$, so that, making use of equation (3.4) for T , the most amplified wavelength writes, mutatis mutandis

$$\lambda_m = \pi h \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1 + \epsilon_0}{\epsilon_0}}, \quad (3.8)$$

and its associated growth rate is

$$\sigma_m = \sqrt{3} \frac{\epsilon_0}{1 + \epsilon_0} \frac{c}{h}. \quad (3.9)$$

The selected mode depends on both the material elastic properties and intensity of the compression, but since the compression is itself a function of the material elasticity, a cancellation effect makes λ_m depend on geometrical parameters only, namely the thickness of the rubber band and initial stretching.

Of course, this naive expectation assumes that the compression front has travelled by a distance at least equal to λ_m during a time lapse given by σ_m^{-1} . A more general mode-selection criterion would thus be that the amplified wavenumber k is the one for which

$$\tau(k)c \simeq k^{-1}, \quad (3.10)$$

and $k = k_m$ otherwise if $\tau(k)c \gg k^{-1}$. There, $\tau(k)$ is the instability time-scale associated with k through the dispersion relation (3.6) such that $\tau(k)^{-1} = \text{Re}\{-i\omega\}$.

The above reasonings are made within the long wave approximation ($kh \ll 1$) and disregard three-dimensional effects when the wavelength becomes of the order of the thickness h , as it is nevertheless the case for the higher initial elongations ϵ_0 . We also do not account for any coupling between the instability development and the compression force, nor any nonlinear elastic response of the material. Finally, the model based on a constant compression force T gives satisfactory results and it was not necessary to couple explicitly the axial front propagation with the buckling dynamics (as in Lepik (2001) and Vaughn & Hutchinson (2006)).

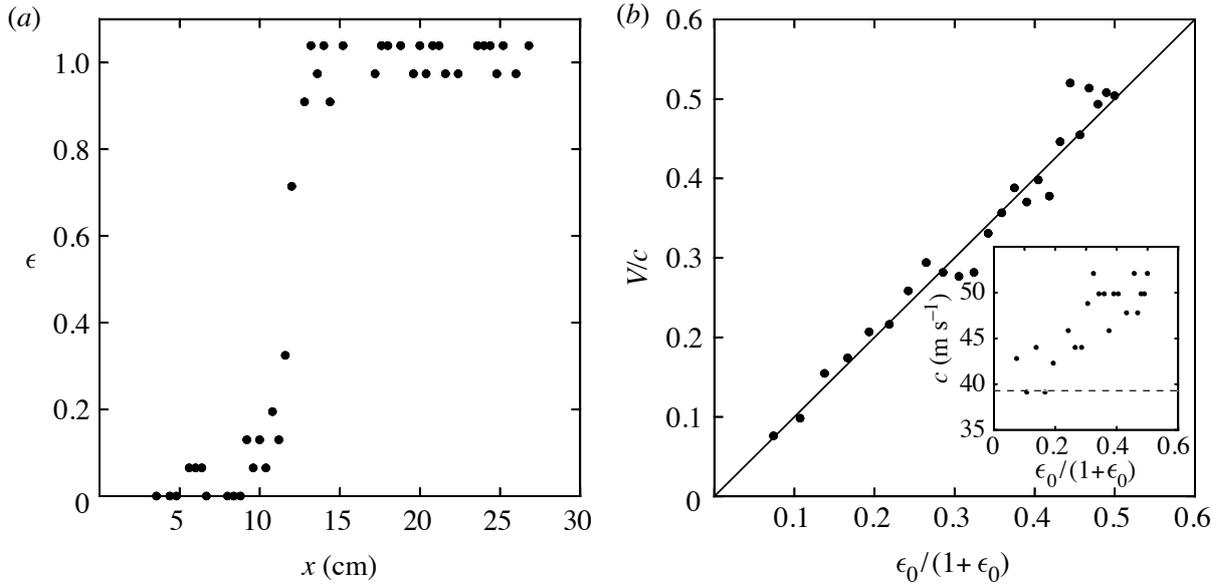


Figure 4. (a) Stretch profile during the propagation of the stress-free front. x is the material coordinate. (b) Ratio V/c versus $\epsilon_0/(1+\epsilon_0)$. The dots stand for the measurements and the line stands for the theoretical prediction with no adjusted parameters. Here, c is the measured front speed which is slightly higher than $(E/\rho)^{1/2} \approx 39 \text{ m s}^{-1}$ (see insert).

(d) *Experimental results*

To measure the propagation speeds, we draw regularly spaced marks along the rubber band (figure 1). The theoretical value of the front velocity for the rubber bands that we used in the experiments is 39 m s^{-1} , which is in agreement with the measurements for small initial stretching. However, the speed of the front is slightly higher, typically 50 m s^{-1} , in particular, for high initial stretching ($\epsilon_0 \geq 0.6$). This is probably due to the effect of the strain rate on the elongational modulus known in rubber (Kolsky 1949), not taken into account here.

The measured value of V typically ranges from 4 to 20 m s^{-1} , depending on the initial stretch (figure 4b). The evolution of the ratio V/c (c is the measured front speed) is in fair agreement with the theoretical prediction. Measurements of the stretching profile show that the front shape is well approximated by a step function (figure 4a). Actually, the dependency of V on initial stretch ϵ_0 found in §3b is valid even for high initial stretching ($\epsilon_0 \approx 1$), i.e. beyond the limitations of the small strain hypothesis.

The first selected wavelength was obtained for rubber bands of thickness from 0.254 up to 1.27 mm, for an initial stretch $\epsilon_0 = 0.2$ (figure 5a). All properties and dimensions of the rubber bands are the same but their thickness. We find that $\lambda_m \sim h$ as expected. Figure 5b shows the experimental wavelengths obtained with a rubber band of thickness $h = 1.27 \text{ mm}$. Experimental results agree with the prediction from equation (3.8) for small initial stretching (i.e. for high $(1+\epsilon_0)/\epsilon_0$ ratio). However, for large initial stretch (i.e. for $(1+\epsilon_0)/\epsilon_0$ smaller than 4), the measured wavelengths are shorter than predicted from equation (3.8). A better fit is obtained considering a mode-selection criterion based on the length travelled by the re-compression front given in equation (3.10). For even higher initial stretch (i.e. for $(1+\epsilon_0)/\epsilon_0 < 2$), the wavelength becomes of the order of the band thickness and the long wave approximation breaks down.

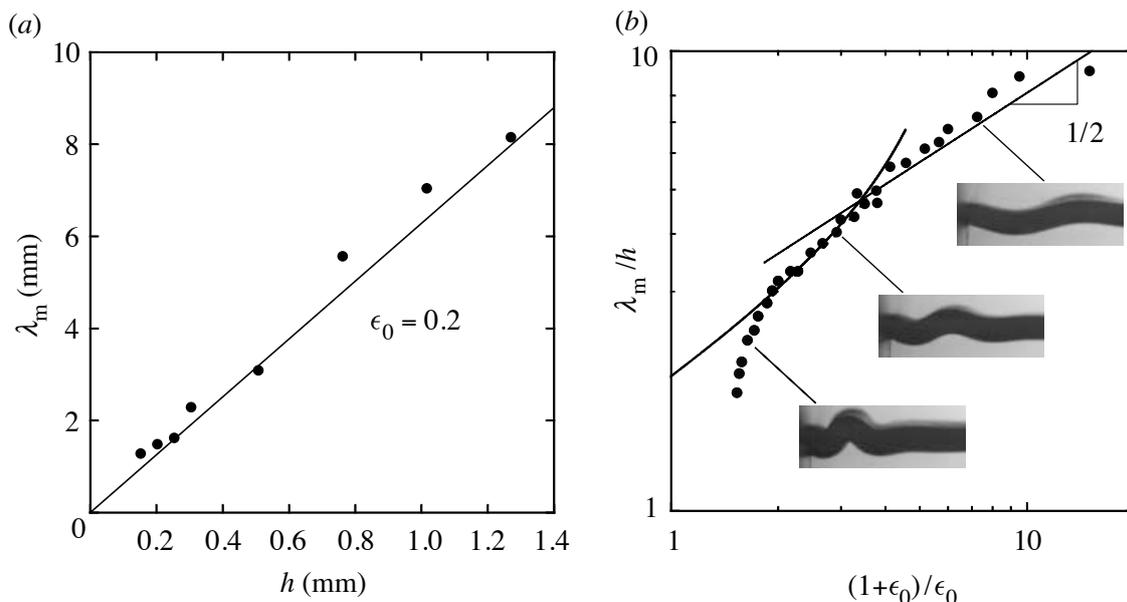


Figure 5. (a) Variation of the selected wavelength λ_m with the thickness of the rubber band h . The straight line stands for the theoretical curve with no adjusted parameters. (b) Variation of the selected wavelength λ_m with the initial stretch ϵ_0 . The straight line stands for the theoretical curve from equation (3.8) with no adjusted factor. The curve fit is from equation (3.10) with $\tau(k)c = 2.6 k^{-1}$.

Note that using a dispersion relation that includes both Rayleigh's correction (rotational inertia) and Timoshenko's correction (effect of shear stress) leads to even higher wavelengths (e.g. Graff 1975). Finally, once the band is wrinkled, the axial stress relaxes by a simple geometrical effect, as suggested by figure 1 (viii) and (ix)). This leads to a coarsening of the initial wrinkled pattern, a phenomenon which is probably at the origin of Lindberg's strong discrepancy between the anticipated and measured wavelength.

4. Recoil of a rubber band in fluids

Several new effects are expected in the presence of an external fluid. First, when the instability develops, fluid must be moved together with the rod and thus we expect added mass effects. Moreover, if the fluid is viscous, we expect damping. In this section, we modify the analysis of §3 to account for these ingredients. As we shall see, in order to accurately describe the dynamic of the rubber band in a fluid, we must also consider the effect of viscosity on the axial-stress front propagation.

(a) Modification of the instability

We consider a thin rod under compressive stress surrounded by an external fluid. We use the same hypotheses and notations as in §3b. The fluid is Newtonian and incompressible, of density ρ_f and of kinematic viscosity ν . The dispersion equation in non-dimensional form (appendix A) reads

$$(k_* + 4M)\sigma_*^2 + 4\chi k_* \left[k_* + \left(\frac{M}{\chi} \sigma_* + k_*^2 \right)^{1/2} \right] \sigma_* + 4k_*^3 (k_*^2 - 1) = 0, \quad (4.1)$$

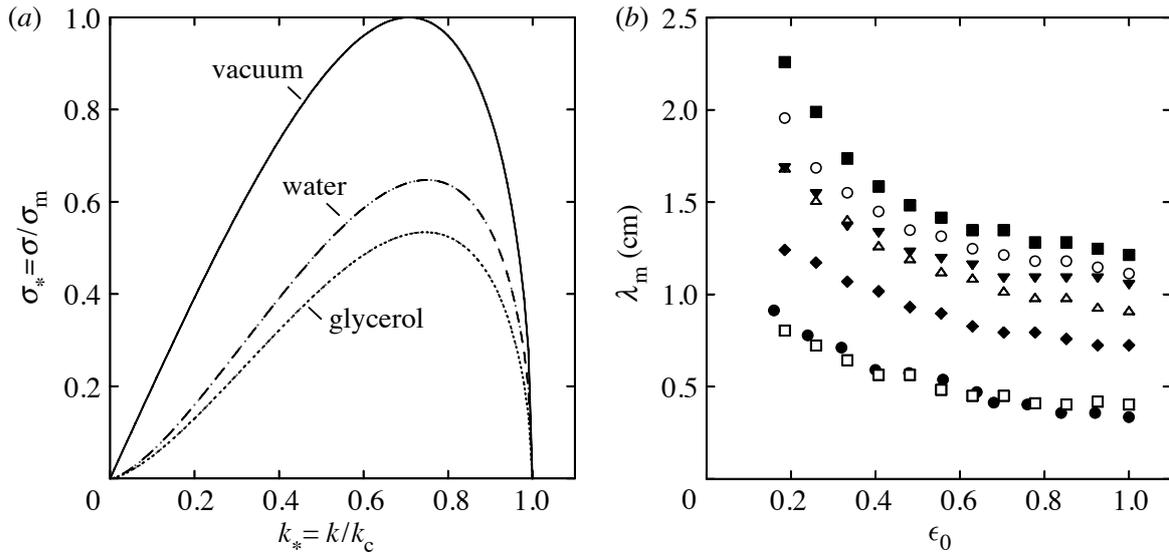


Figure 6. (a) Predicted non-dimensional growth rate σ_* versus non-dimensional wavenumber k_* . For vacuum, $\chi=0$ and $M=0$; for water, $\chi=3.5 \times 10^{-5}$ and $M=0.25$; and for glycerol, $\chi=2 \times 10^{-2}$ and $M=0.35$. (b) Measurements of the selected wavelength λ_m versus initial stretch ϵ_0 for different fluids: filled circle, air; open square, water; filled diamond, glycerol $\eta=0.04$ Pa s; open up triangle, glycerol $\eta=0.190$ Pa s; filled down triangle, glycerol $\eta=0.650$ Pa s; open circle, glycerol $\eta=0.450$ Pa s; filled square, glycerol $\eta=0.650$ Pa s.

where $k_* = k/k_c$ and $\sigma_* = \sigma/\sigma_m$. M and χ are two non-dimensional numbers related to the added mass term and the viscous term, defined as

$$M = \frac{\rho_f}{4\pi\rho k_c h}, \quad \chi = \left[\frac{\eta^2 b}{\rho |T| h} \right]^{1/2}, \quad (4.2)$$

where $T = -Eb h \epsilon$. χ depends on the dynamic viscosity $\eta = \rho_f \nu$ of the fluid and on the Young modulus E , density ρ , thickness h and extensional strain of the rod (but b cancels out in the expression for χ , when T is expressed in terms of E).

Figure 6 shows the dispersion relation obtained in different fluids (note that the glycerol we used was not pure and its dynamic viscosity was $\eta=0.65$ Pa s). The viscous number χ is rather small ($\chi=0.02$ for a dynamic viscosity $\eta=0.65$ Pa s). Therefore, the main effect of the external fluid is the added mass effect that results in a significant decrease of the instability growth rate. Compared with the theoretical value in vacuum, growth rate should decrease by a factor 1.6 for water and almost a factor 2 for glycerol. On the other hand, the selected wavelength is not significantly modified by the interaction with the external fluid. For high χ numbers (i.e. for high viscosity), the selected wavenumber decrease to an asymptotic value, $k_{*m} \sim 1/\sqrt{3}$ instead of $k_{*m} = 1/\sqrt{2}$ with no external medium. The added mass tends to increase the selected wavenumber and for high values of M , k_{*m} goes to $\sqrt{3/5}$.

(b) Experiments in fluids

We conducted experiments in water, and in water-glycerol mixtures with viscosity ranging from $\eta=4 \times 10^{-2}$ up to 0.65 Pa s. Figure 6b shows wavelengths measured in air, water and water-glycerol mixtures. In water, the results are

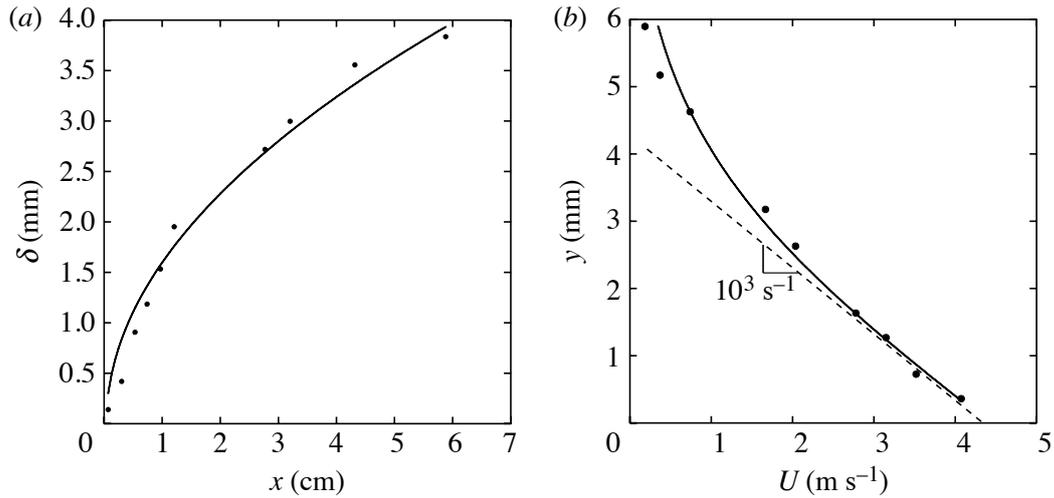


Figure 7. (a) Thickness of the boundary layer δ versus axial coordinate x at one instant of time. The origin for x is the position of the stress-free front. The continuous line is a square root fit. (b) Velocity profile in the boundary layer at the position $x=85$ mm and 13 ms after the passage of the front. Data is fitted by a function of the form $U_0(1-\text{erf}(y/\delta))$ and we find $\delta=4.74$ mm, which is close to the theoretical prediction $(4\nu[t-x/c])^{1/2}=4.89$ mm.

similar to those performed in air. With more viscous fluids, we observe a significant increase of the selected wavelength. The wavelength is more than doubled in the glycerol ($\eta=0.65$ Pa s). As discussed above, that effect is too large to be attributed to the impact of viscosity on mode selection in the buckling instability.

To clarify the effect of viscosity on the propagation of the compression front, we visualized the flow field. Particles were added to the fluid (glycerol with dynamic viscosity $\eta=0.65$ Pa s) and the elastic was illuminated by a laser sheet. After the release of the rubber band, a boundary layer follows the axial-stress front. The spatial profile of the boundary layer in the plane of the length and thickness of the rubber band (which was the plane illuminated by the laser sheet) is shown in figure 7a. The profile of the boundary layer is well fitted by a square root function of the axial coordinate. A movie showing the development of the boundary layer is included in the electronic supplementary material.

Let $U(x, y, t)$ be the velocity profile in the fluid at a given instant of time and axial location. Direction y is perpendicular to the band surface located in $y=0$. Figure 7b shows such a profile. The viscous frictional force per unit length of the band is given by

$$\tau_f = -2b\eta \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (4.3)$$

the factor 2 accounting for the two sides of the band. Using the velocity gradient measured on figure 7b and ℓ_0 as an estimate of the length the front has gone through, an order of magnitude of the frictional force is $F_f \sim \tau_f \ell_0 \approx 0.5$ N. A typical value of the velocity of the free end of the rubber band is 6 m s^{-1} . Thus, the order of magnitude of the drag force $F_d \approx b\eta U$ at the free end of the rubber band is $F_d \approx 1.5 \times 10^{-2}$ N. Obviously, the drag force at the end is small compared with the frictional force. Moreover, the friction increases as the stress-free front propagates and as the region dragged by the front gets wider.

An equation for the longitudinal displacement ζ accounting for frictional forces is

$$\rho bh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = Ebh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \tau_f. \tag{4.4}$$

In this plane boundary layer approximation, we first neglect the contribution of the small dimension h and disregard the contribution of the corners. Let $U_0(x, t) = U(x, 0, t) = \partial\zeta(x, t)/\partial t$ be the axial velocity of the band. When U_0 is a function of time, the net force per unit length applied to the band is (see Stokes (1850) cited in Lamb (1932))

$$\tau_f = -\frac{2\eta b}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^\infty \frac{\partial U_0}{\partial t}(t-t') \frac{dt'}{\sqrt{t'}}, \tag{4.5}$$

so that equation (4.4) becomes

$$\rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = Eh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{2\eta}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^\infty \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(t-x/c-t') \frac{dt'}{\sqrt{t'}}, \tag{4.6}$$

where t has been replaced by $t-x/c$ (where c is the velocity of the front) because the viscous term vanishes for $t < x/c$, i.e. when the front has not yet reached the material point x .

Now, this integro-differential equation can be simplified by considering figure 7 suggesting that the transverse velocity profile in the fluid is, in fact, very close to that developing over a plate initially at rest and moved suddenly at $t=x/c$ at a constant velocity (Stokes 1850),

$$U(x, y, t) \approx U_0(x, t) \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{4\nu(t-x/c)}} \right) \right\}. \tag{4.7}$$

Then, using equation (4.7), we obtain in place of equation (4.4)

$$\rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = Eh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{2\eta}{\sqrt{\pi\nu(t-x/c)}} \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{4.8}$$

This equation has no analytic solution. However, if we focus on the long time dynamics for $t \gg x/c$ (far from the front and close to the released end) and therefore neglect inertia, an asymptotic solution can be found. Equation (4.8) being linear, the stretch $\epsilon = \partial\zeta/\partial x$ obeys the same equation as the longitudinal displacement ζ , thus, in the above mentioned limit

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial T} = D \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2}, \tag{4.9}$$

where $D = Eh\sqrt{\pi\nu}/(3\eta)$. We use the time-scale $T = t^{3/2}$ and consider that $\epsilon(0, t) = 0$. Then the asymptotic solution is

$$\frac{\epsilon(x, T)}{\epsilon_0} = \operatorname{erf} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{DT}} \right\}, \tag{4.10}$$

which implies that the width of the front scales like $T^{1/2} = t^{3/4}$ for large propagation time. Integrating $\epsilon(x, T)$ with respect to x , we find the expression for the displacement ζ ,

$$\zeta(x, T) = \epsilon_0 x \operatorname{erf} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{DT}} \right\} + \frac{2\epsilon_0 \sqrt{DT}}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4DT} \right\}, \tag{4.11}$$

which implies that the displacement of the free end of the rubber band goes like $T^{1/2} = t^{3/4}$ for large propagation time. The consistency of the inertialess

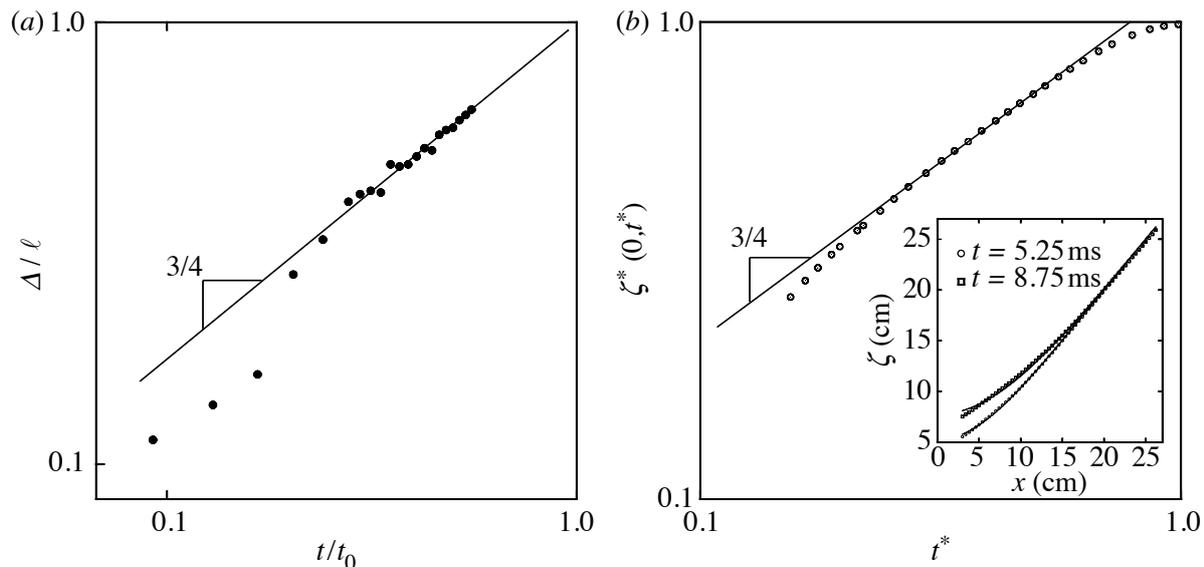


Figure 8. (a) Dimensionless width Δ/ℓ versus dimensionless time t/t_0 . ℓ is the length of the stretched rubber band and t_0 is the time such that $Dt_0^{3/4} = \ell^2$. Δ is obtained by fitting the strain front profile (see text). (b) Dimensionless displacement at the free end versus dimensionless time. The front profile is well fitted by expression (4.11) (insert) and displacement of the free end goes like $t^{3/4}$ at large times.

approximation is justified *a posteriori* noticing that both the terms retained in the balance of equation (4.9) are of order ϵT^{-1} while the inertial term is of order $\epsilon T^{-4/3}$, i.e. subdominant at large time.

The displacement and the strain were measured by tracking the motion of marks drawn on the rubber band. For different values of time, the strain profile is fitted by a function $\text{erf}(x/\Delta)$ and the values of Δ are plotted on figure 8a. For sufficiently large time, we observe the expected behaviour $\Delta \sim t^{3/4}$. The displacement front is well fitted by expression (4.11) and that of the free end proceeds like $t^{3/4}$ at large times.

However, in all cases, the apparent coefficient in front of \sqrt{Dt} was about half the expected one. This deviation indicates that the experimental friction is larger than the one anticipated by approximating the total friction as the sum of the two boundary layers friction on both sides of the band (equations (4.3) and (4.4)). The reason is the influence of the band section corners, negligible at short time, but contributing by an amount of the same order than the one from the boundary layers when their thickness δ becomes comparable to the width b . The total friction per unit length writes in fact (in the limit $h \ll b$)

$$\tau_f = 2\eta \frac{U_0 b}{\sqrt{\pi \nu t}} \left(1 + \frac{2\sqrt{\nu t}}{\sqrt{\pi b}} \right), \quad (4.12)$$

and is indeed twice that obtained by simply adding the plane boundary layers contributions when $\delta \simeq \sqrt{\nu t} \approx b$, a condition soon reached in the present case (figure 7).

(c) Dynamic buckling with a linear stress profile

Owing to skin friction, in glycerol, when the front reaches the clamped end its shape is approximately a straight line. Indeed, $\epsilon = \text{erf}(x/2\sqrt{DT}) \sim x/2\sqrt{DT}$ for $x \ll \sqrt{DT}$. Thus, as an approximate model, we consider the rebound of a linear

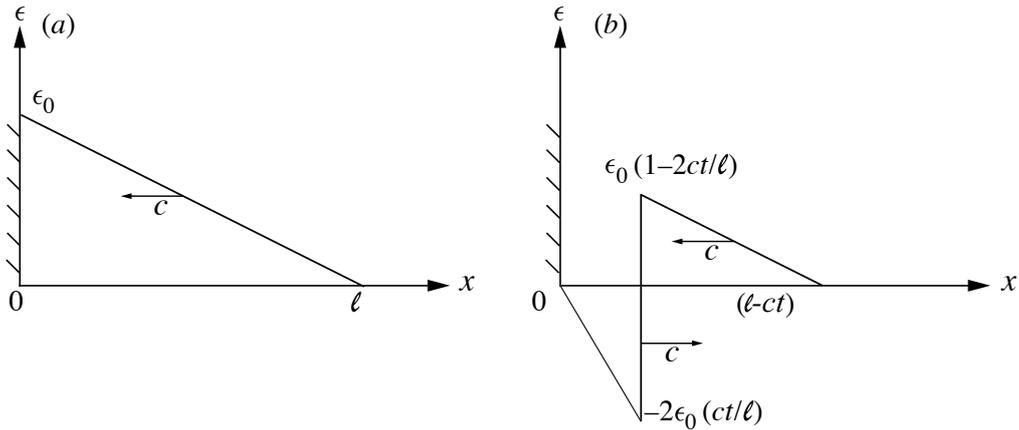


Figure 9. (a) Linear strain profile reaching the clamped end with velocity c . (b) Strain profile at time t after the rebound at the clamped end.

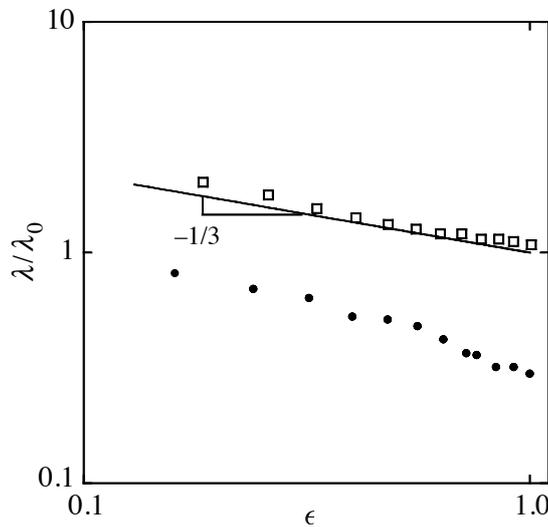


Figure 10. Buckled wavelength versus initial stretching in log-log scale with $\lambda_0=2(\pi^2h^2\ell/12)^{1/3}$. Open square, measurements in glycerol $\eta=0.650$ Pa s; and filled circle, measurements in air. The continuous line shows the theoretical curve (equation 4.13) with no adjusted parameter.

front moving at a velocity c towards the clamped end. When the stress-free front reaches the clamped end at $t=0$, the strain profile has the form $\epsilon(x)=\epsilon_0(1-x/\ell)$ as shown in figure 9a.

At time t , the front rebounds and in the section behind the rebounding front ($0 \leq x \leq \ell-ct$), the stretching is $\epsilon(x)=-2\epsilon_0x/\ell$. At time t , the mean compressive force behind the front is $T_m=-(Ebhct/\ell)\epsilon_0$. We consider that buckling starts when the front has reached the length $\lambda/2$ where $\lambda=(|T_m|/2EI)^{1/2}$ is the wavelength selected by dynamic buckling and thus we obtain

$$\lambda = 2 \left\{ \frac{\pi^2 h^2 \ell}{12 \epsilon_0} \right\}^{1/3}. \tag{4.13}$$

The same method applied to the case of a discontinuous front results in the following expression of the buckled wavelength: $\lambda = \pi h \sqrt{2/3 \epsilon_0}$ as it is known and discussed in §3b, considering $\epsilon_0 \ll 1$. A satisfactory comparison with the experimental measurements of the buckled wavelength is shown in figure 10. This approach

shows that taking into account the spreading of the front is sufficient to explain the greater observed wavelengths. Therefore, the increase of the buckled wavelength is not due to viscous effects involved during the dynamic buckling itself.

5. Conclusion

The main phenomena involved in the recoil of an initially stretched rubber band are the propagation of an axial-stress front, its rebound and the development of a buckling instability. A simple description of longitudinal and transverse elastic waves provides a good insight on the dynamics. The main point is that, at early stage of the recoil, the wavelength is correctly predicted in this framework at least for moderate initial elongation (i.e. $\epsilon_0 < 1$).

At higher initial strain, the wavelength becomes of the order of the band thickness and the long wave description is no longer appropriate. Three-dimensional deformations lead to even smaller wavelength. Once the band is wrinkled, the axial stress relaxes by a simple geometrical effect leading to a coarsening of the initial undulations.

When the rubber band is immersed in a fluid, the major effect is the spreading of the initial front owing to boundary layer friction. The smoother stress profile leads to longer wavelength, and a simple model based on a linear compressive strain profile gives a good estimate of the most amplified wavelength. Added mass effects slow down the instability but do not modify mode selection appreciably. The impact of both fluid viscosity and density on the instability development are quantified with appropriate dimensionless numbers.

It was not necessary to account for a possible nonlinear elastic response of the material.

This work was supported by the Agence Nationale de la Recherche through the grant ANR-05-BLAN-0222-01. R.V. was supported by the Délégation Générale à l'Armement.

Appendix A. Dispersion relation for the buckling of a rod interacting with a surrounding fluid.

We derive the dispersion relation (equation (4.1)) for waves propagating along the rubber band in a viscous fluid, in two dimensions. In the reference state, the elastic rod is of infinite extent in the x -direction and its thickness is h . The two fluid domains, denoted by the index 1 for the upper domain ($y > 0$ in the reference configuration) and 2 for the lower domain separated by the rubber band. The model is based on the linearized Navier–Stokes equation for the two fluid domains.

$$\rho \frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} = -\frac{\partial P_{1,2}}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 U_{1,2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{1,2}}{\partial y^2} \right), \quad (\text{A } 1)$$

$$\rho \frac{\partial V_{1,2}}{\partial t} = -\frac{\partial P_{1,2}}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 V_{1,2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{1,2}}{\partial y^2} \right). \quad (\text{A } 2)$$

The fluid is incompressible. Thus, $\nabla^2 P_{1,2} = 0$ and we look for P_1 and P_2 of the form

$$P_1 = p_1^{(0)} + p_1 \exp(-ky) \exp(\sigma t - ikx), \tag{A 3}$$

$$P_2 = p_2^{(0)} + p_1 \exp(ky) \exp(\sigma t - ikx), \tag{A 4}$$

where we have used the condition that pressure must remain finite at infinity. We look for $V_{1,2}$ of the form

$$V_{1,2} = v_{1,2}(y) \exp(\sigma t - ikx). \tag{A 5}$$

Using these forms for $P_{1,2}$ and $V_{1,2}$ in equations (A 1) and (A 2), we have

$$q^2 v_1 - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = -\frac{k}{\eta} p_1 \exp(-ky), \tag{A 6}$$

$$q^2 v_2 - \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = \frac{k}{\eta} p_2 \exp(-ky), \tag{A 7}$$

where

$$q^2 = \frac{\rho \sigma}{\eta} + k^2. \tag{A 8}$$

Thus, for V_1 and V_2 , we have (using the condition that V must remain finite)

$$V_1 = \{A_1 \exp(-qy) + B_1 \exp(-ky)\} \exp(\sigma t - ikx), \tag{A 9}$$

$$V_2 = \{A_2 \exp(qy) + B_2 \exp(ky)\} \exp(\sigma t - ikx), \tag{A 10}$$

with

$$p_1 = \frac{\eta}{k} (q^2 - k^2) B_1 \text{ and } p_2 = \frac{\eta}{k} (q^2 - k^2) B_2. \tag{A 11}$$

We use the continuity equations

$$\frac{\partial U_{1,2}}{\partial x} + \frac{\partial V_{1,2}}{\partial y} = 0, \tag{A 12}$$

to obtain $U_{1,2}$

$$U_{1,2} = -\frac{1}{ik} \frac{\partial V_{1,2}}{\partial y}. \tag{A 13}$$

There are four boundary conditions at the interface between the fluid and rod.

- Assuming that the cross-sections of the rod are moving along the y -direction without being stretched or compressed, the transverse displacement is homogenous in a section yielding the kinetic conditions at both interfaces ($y = \pm h/2$) in the transverse direction

$$V_1|_{y=h/2} = V_2|_{y=-h/2} = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \tag{A 14}$$

- With a fluid initially at rest and in the slender slope limit, the difference of horizontal velocity across a section is

$$U_1|_{y=h/2} - U_2|_{y=-h/2} = -h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x}. \tag{A 15}$$

Then, neglecting the thickness of the rod h versus the wavelength $\lambda = 2\pi/k$, the equation (A 15) leads to the kinetic condition in the axial direction

$$U_1|_{y=h/2} = U_2|_{y=-h/2}. \quad (\text{A } 16)$$

- Moreover, we are looking for modes that are anti-symmetrical across the medium line, i.e. such that

$$\Gamma_{xy,1} = \Gamma_{xy,2}, \quad (\text{A } 17)$$

where $\Gamma_{xy,1,2}$ is the xy term of the viscous stress tensor in the fluid. This condition also states that the shear stress at the rod surface is anti-symmetrical.

- For the transverse motion of the rod, we use an Euler–Bernoulli model

$$\rho_0 S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + b\Delta [-P_{1,2} + \mathbf{n}_2 \cdot (\hat{\mathbf{T}}_{1,2} \mathbf{n}_{1,2})] = 0, \quad (\text{A } 18)$$

where the last term of the left-hand side represents the fluid-stress difference between both sides of the rod. $\hat{\mathbf{T}}_{1,2}$ is the viscous stress tensor in the fluid and $\mathbf{n}_{1,2}$ is the vector normal to the interface. $\hat{\mathbf{T}}_{1,2}$ in the fluid takes the form

$$\hat{\mathbf{T}}_{1,2} = \begin{pmatrix} \eta \frac{\partial U_{1,2}}{\partial x} & \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial U_{1,2}}{\partial y} + \frac{\partial V_{1,2}}{\partial x} \right) \\ \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial U_{1,2}}{\partial y} + \frac{\partial V_{1,2}}{\partial x} \right) & \eta \frac{\partial V_{1,2}}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (\text{A } 19)$$

At leading order, we have $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = (-\partial\xi/\partial x, 1)$ and thus,

$$\Delta [\mathbf{n}_2 \cdot (\hat{\mathbf{T}}_{1,2} \mathbf{n}_{1,2})] = 2\eta \left(\frac{\partial V_2}{\partial y} \Big|_{y=h/2} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \Big|_{y=-h/2} \right) \quad (\text{A } 20)$$

Using these four conditions in equations (A 6), (A 7) and (A 14), we obtain a dispersion equation for the dynamic buckling of the rod in the fluid

$$A_1 - A_2 = (B_2 - B_1) \exp \left[\frac{(q-k)h}{2} \right]. \quad (\text{A } 21)$$

Using the form of $U_{1,2}$ (equation (A 13)) and equation (A 16), we obtain

$$A_1 + A_2 = -\frac{k}{q} (B_2 + B_1) \exp \left[\frac{(q-k)h}{2} \right]. \quad (\text{A } 22)$$

And finally, from the relation between tangential stress (equation (A 17)) and using the forms of V (equations (A 9) and (A 10)) and U (equation (A 13)), we get

$$A_1 - A_2 = \frac{2k^2}{q^2 + k^2} (B_2 - B_1) \exp \left[\frac{(q-k)h}{2} \right]. \quad (\text{A } 23)$$

Combining equations (A 21) and (A 23) and using equation (A 11), we have

$$A_1 = A_2, \tag{A 24}$$

$$B_1 = B_2, \tag{A 25}$$

$$p_1 = -p_2. \tag{A 26}$$

Using equation (A 22), we find

$$A_1 = -\frac{k}{q} B_1 \exp\left[\frac{(q-k)h}{2}\right]. \tag{A 27}$$

We write $\Delta(-P_{1,2} + \mathbf{n}_2 \cdot \hat{\mathbf{T}}_{1,2} \mathbf{n}_{1,2})$ in terms of B_1 ,

$$\begin{aligned} &\Delta(-P_{1,2} + \mathbf{n}_2 \cdot (\hat{\mathbf{T}}_{1,2} \mathbf{n}_{1,2})) \\ &= \left\{ (p_1 - p_2)e^{-kh/2} + \eta q(A_1 + A_2)e^{-qh/2} + \eta k(B_1 + B_2)e^{-kh/2} \right\} e^{\sigma t - ikx} \\ &= \left\{ 2 \frac{\eta(q^2 - k^2)}{k} B_1 e^{-kh/2} \right\} e^{\sigma t - ikx}. \end{aligned} \tag{A 28}$$

The expression of ξ is obtained from the transversal boundary condition (equation A 14)

$$\xi = \frac{1}{\sigma} \{A_1 e^{-qh/2} + B_1 e^{-kh/2}\} e^{\sigma t - ikx}. \tag{A 29}$$

Introducing this expression in (A 18) and using relations (A 21) and (A 28), we obtain the dispersion equation

$$\left(\rho_0 S + 2 \frac{\rho b}{k}\right) \sigma^2 + 2b\eta(k + q)\sigma + EIk^4 - Tk^2 = 0. \tag{A 30}$$

In dimensionless form, this relation reads

$$\{k_* + 4M\} \sigma_*^2 + 4\chi k_* \left\{ k_* + \left(\frac{M}{\chi} \sigma_* + k_*^2 \right)^{1/2} \right\} \sigma_* + 4k_*^3 (k_*^2 - 1) = 0, \tag{A 31}$$

with $k_* = k/k_c$ and $\sigma_* = \sigma/\sigma_m$. The two dimensionless coefficients are

$$\chi = \left(\frac{\eta^2 b}{\rho_0 Th} \right)^{1/2} \text{ and } M = \frac{\rho \lambda_c}{4\pi \rho_0 h}. \tag{A 32}$$

References

Bouasse, H. & Carrière, Z. 1903 Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 2e série* **5**, 257–283.

Euler, L. 1744 Addidendum I de curvis elasticis, methodus inveniendi lineas curvas maximi minimi proprietate gaudentes. In *Opera Omnia I*, pp. 231–297. Lausanne.

Gladden, J. R., Handzy, N. Z., Belmonte, A. & Villiermaux, E. 2005 Dynamic buckling and fragmentation in brittle rods. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 035503. (doi:10.1103/PhysRevLett.94.035503)

- Graff, K. G. 1975 *Wave motion in elastic solids*. New York, NY: Dover Publications.
- Kolsky, H. 1949 An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading. *Proc. Phys. Soc. B* **62**, 676–700. (doi:10.1088/0370-1301/62/11/302)
- Lamb, H. 1932 *Hydrodynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Lepik, U. 2001 Dynamic buckling of elastic-plastic beams including effects of axial stress waves. *Int. J. Impact Eng.* **25**, 537–552. (doi:10.1016/S0734-743X(00)00070-1)
- Lindberg, H. E. 1965 Impact buckling of a bar. *J. Appl. Mech.* **32**, 315–322.
- Love, A. E. H. 1944 *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4th edn. New York, NY: Dover Publications.
- Mason, P. 1963 Finite elastic wave propagation in rubber. *Proc. R. Soc. A* **272**, 315–330.
- Mullins, L. 1947 Effect of stretching on the properties of rubber. *J. Rubber Res.* **16**, 275–289.
- Saint-Venant, M. & Flamant, A. 1883 Résistance vive ou dynamique des solides. Représentation graphique des lois du choc longitudinal, subi à une des extrémités par une tige ou barre prismatique assujettie à l'extrémité opposée. *C.R. Acad. Sci.* **97**, 127–133.
- Stokes, G. G. 1850 On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Camb. Phil. Soc.* **IX**, 8 sec 52.
- Vaughn, D. G. & Hutchinson, J. W. 2006 Bucklewaves. *Eur. J. Mech. A/Solids* **25**, 1–12. (doi:10.1016/j.euromechsol.2005.09.003)

3 Impact axial sur une barre fragile

Dans cette partie, nous résumons brièvement les résultats et l'avancée actuelle des recherches concernant la fragmentation sous impact d'une barre fragile.

3.1 Influence de l'instabilité de flambage dynamique sur les patterns de brisure

En 2005, J.R. Gladden & *al* menèrent des expériences sur la fragmentation d'une barre fragile sous impact [11]. Ainsi, ils observèrent le développement d'une instabilité de flambage dynamique, consécutive à l'impact, et provoquant la brisure de la barre. Comme système expérimental, ils utilisèrent des pâtes, considérées comme un matériau céramique.

Longueur d'onde et temps de croissance

Le modèle utilisé pour calculer la longueur d'onde de flambage est le même que celui développé dans l'étude sur l'élastique. Toutefois, dans le cas d'une barre soumise à un impact, la vitesse V_i du projectile est indépendante des propriétés du matériau recevant le choc. De ce fait, contrairement au cas de l'élastique initialement étiré, la déformation occasionnée par l'impact dépend des propriétés du matériau et n'est plus seulement déductible d'un raisonnement géométrique. De plus, dans le cas des pâtes, la vitesse du son est plus élevée ($c \simeq 1800 \text{ m.s}^{-1}$), si bien que pour des barres de longueur raisonnable ($L \sim 20 \text{ cm}$), le temps mis par le front pour parcourir toute la longueur de la barre est de l'ordre du temps de croissance de l'instabilité τ_b . Par conséquent, en fonction de la longueur de la pâte, les rebonds successifs du front de compression augmenteront la contrainte de compression. Ainsi la longueur d'onde de flambage et le temps de croissance, prédits par la théorie linéaire sont :

$$\lambda_b = d \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{c}{\gamma V_i}}, \quad \tau_b = \frac{d}{2\gamma V_i} \quad (2.1)$$

où d est le diamètre du spaghetti et γ le nombre de rebonds du front de compression. En pratique, la décélération du projectile limite le nombre de rebond du front, si bien que dans des expériences comme celle présentée dans la figure 2.1 le nombre de rebonds ne dépasse pas $\gamma = 3$. Pour l'élastique, l'approximation $\epsilon_0 \ll 1$, pertinente dans le cas des barres fragiles plus rigides, conduit aux expressions suivantes pour la longueur d'onde de flambage et le temps de croissance :

$$\lambda_e = h \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_0}}, \quad \tau_e = \frac{h}{\sqrt{3\epsilon_0}c} \quad (2.2)$$

Dans le cas de l'élastique, la vitesse d'impact étant déterminée par la dynamique de relâchement, le rapport c/V est uniquement fonction de l'élongation initiale. D'ailleurs, si on se fie à la relation (3.3) de l'article *Rubber band recoil* [12], dans la limite $\epsilon_0 \ll 1$, on a $\epsilon_0 = V/c$. Comme V joue le rôle de la vitesse d'impact, pour les deux phénomènes, on retombe bien sur la même loi d'échelle pour la longueur d'onde et le taux de croissance. Par ailleurs, toujours dans le cas de l'élastique,

l'ordre de grandeur du temps mis par le front de compression pour parcourir toute la longueur du ruban est $t_L \simeq 20 \tau_m$. Ceci exclut l'influence du rebond du front de compression sur l'instabilité dans ce cas précis. De ce fait, on a $\gamma = 1$ pour l'élastique.

En somme, l'instabilité de flambage dynamique, observée à la fois pour les barres soumises à un impact et lors du repliement de l'élastique, est de même nature. En revanche, dans le cas de l'élastique, la vitesse d'impact étant une fraction de c , les propriétés du matériau s'annulent dans l'expression de la longueur d'onde de flambage. Pour les mêmes raisons, alors que le temps de croissance dépend de la vitesse du son dans le matériau lors du repliement de l'élastique, il dépend de la vitesse d'impact dans le cas des barres. Par ailleurs, la vitesse du son, plus faible dans les caoutchoucs, empêche les multiples rebonds du front de compression pendant le développement de l'instabilité.

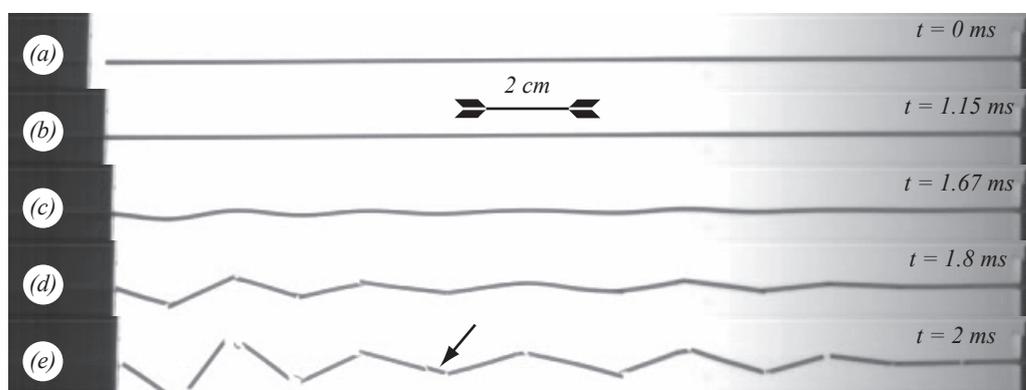


FIG. 2.1 – Impact d'une masse rigide sur un spaghetti à la vitesse $V_i = 5.8 \text{ m.s}^{-1}$. La masse du projectile est $M = 400 \text{ g}$. Le spaghetti est de longueur $L = 22 \text{ cm}$, de diamètre $d = 1.1 \text{ mm}$ et de masse $m = 0.37 \text{ g}$. (a) La barre est au repos, le projectile avance à la vitesse V_i . (b) Le projectile arrive au contact de l'extrémité libre du spaghetti. (c) On observe l'instabilité de flambage dynamique de la barre. (d) et (e) L'instabilité de flambage conduit à la fragmentation de la barre fragile. La flèche noire repère un fragment dû à une brisure secondaire.

Motifs de brisure

Dans le cas d'une barre fragile, lorsque la déformation due à l'instabilité atteint des rayons de courbure critiques, on assiste à la brisure de celle-ci. La figure 2.1 montre une expérience d'impact sur un spaghetti. On observe le développement de l'instabilité après l'impact du projectile à l'extrémité libre. On remarque que les brisures coïncident avec les régions de la barre présentant des courbures maximales (d), et, à la suite des premières brisures, des brisures secondaires peuvent apparaître (e). D'autres petits fragments, de taille inférieure caractéristique inférieure au diamètre de la barre peuvent également se former localement, aux point de rupture initiaux.

Dès lors, on comprend l'influence directe de la longueur d'onde de flambage sur la distribution de taille des fragments. Ainsi, les mesures de Gladden & al, aussi

bien que celles effectuées par notre équipe, montrent que la distribution de taille des fragments présente des pics centrés sur les longueurs $\lambda_b/2$ et $\lambda_b/4$.

3.2 Prise en compte de l'aspect probabiliste du phénomène de brisure

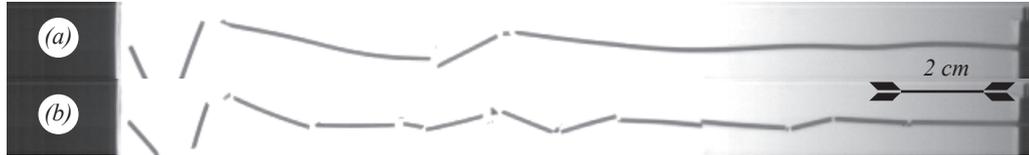


FIG. 2.2 – Impact d’une masse rigide sur deux spaghetti identiques dans les mêmes conditions d’impact. La vitesse du projectile est $V_i = 5.8 \text{ m.s}^{-1}$ et sa masse $M = 400 \text{ g}$. Les spaghetti sont de longueur $L = 22 \text{ cm}$, de diamètre $d = 1.1 \text{ mm}$ et de masse $m = 0.37 \text{ g}$. (a) Le premier spaghetti présente six fragments, dont le plus grand possède une taille comparable à la longueur totale du spaghetti. (b) Le deuxième spaghetti présente quatorze fragments dont la taille est comparable à la demi-longueur d’onde de flambage.

Evidence du caractère probabiliste de la fragmentation

Si les distributions de tailles de fragments présentent des pics centrés sur des longueurs caractéristiques de l’instabilité de flambage dynamique, elles restent néanmoins assez larges. Ainsi, la figure 2.2 illustre deux expériences d’impact sur des spaghetti dans des conditions identiques. Toutefois, on observe clairement une assez grande différence dans le nombre et la taille des fragments obtenus. Ceci est d’ailleurs clairement visible dans les résultats d’expériences menées au sein de notre équipe [13]. Les mesures conduites pour des conditions d’impact identiques à celles pratiquées dans les expériences de la figure 2.2 sont visibles sur la figure 2.3. Ces résultats montrent bien l’écart à une distribution mono-dispersée de fragments de taille $\lambda_b/2$. Par conséquent, si on souhaite mieux décrire le nombre et la taille des fragments, l’aspect probabiliste du phénomène de brisure doit être pris en compte.

Vers la compréhension de la brisure comme événement probabiliste

Si l’étude de l’instabilité de flambage permet la connaissance de la déformation menant à la brisure, ainsi que son temps de croissance, elle ne permet pas de déterminer un critère de brisure réaliste. De ce fait, le critère de rupture apparaît comme non trivial et la brisure doit être interprétée comme un événement probabiliste. Ainsi, les expériences d’impacts sur les spaghetti montrent que la probabilité de rupture dépend de la courbure locale et du temps de croissance de la déformation.

Dans le but de mieux comprendre l’occurrence des brisures, des expériences statiques de fragmentation d’un *elastica* sont actuellement menées par N. Vandenberghe & E. Villermaux [14]. De même que dans les études précédentes, des pâtes sont utilisées comme modèle expérimental. L’expérience consiste à appliquer une compression

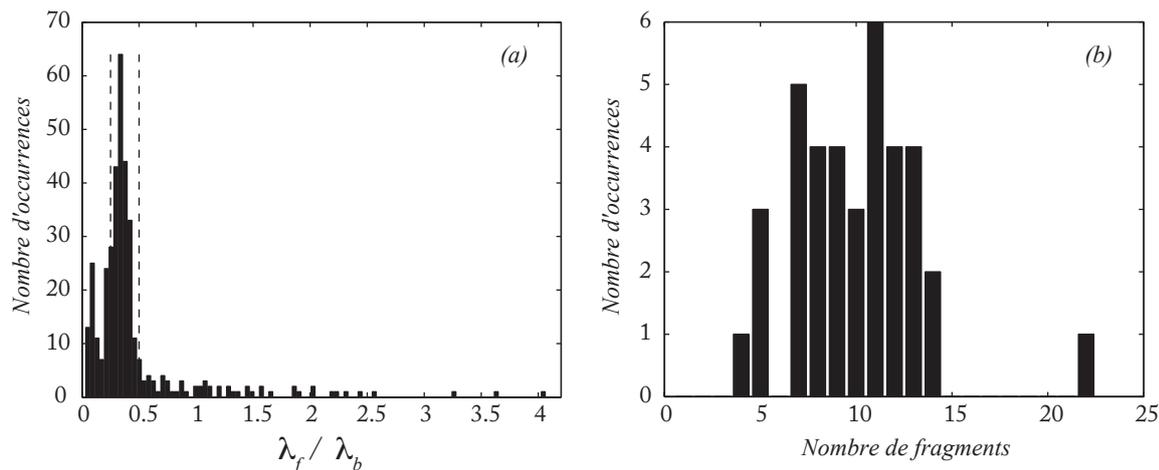


FIG. 2.3 – Statistiques des fragments obtenus lors d’impacts sur des spaghettis. La vitesse du projectile est $V_i = 5.8 \text{ m.s}^{-1}$ et sa masse $M = 400 \text{ g}$. Les spaghetti sont de longueur $L = 22 \text{ cm}$, de diamètre $d = 1.1 \text{ mm}$ et de masse $m = 0.37 \text{ g}$. (a) Distribution de la taille des fragments. Les lignes verticales en pointillés indiquent des tailles correspondant aux quart et demi longueurs d’onde de flambage. (b) Distribution du nombre de fragments.

axiale à une tige élastique de telle sorte que celle-ci soit soumise à une instabilité de flambage statique. Si la déformation est suffisante, la tige peut se briser en plusieurs fragments. Ainsi, les résultats préliminaires montrent l’existence d’un temps de retard à la rupture, dépendant de la courbure appliquée et largement distribué. Ce temps de retard est probablement le résultat d’une compétition entre l’ouverture des défauts du matériau et le temps caractéristique des écoulements plastiques au sein de la pâte. Par conséquent, les réarrangements à l’échelle microscopique et la brisure retardée influent sur le critère de rupture. Par ailleurs, ces expériences mettent en évidence l’importance de la première brisure sur la distribution finale des fragments. En effet, la courbure de l’*elastica* à l’instant de première brisure influe directement sur la taille des fragments secondaires. On observe ainsi que plus la courbure de première fracture est élevée, plus la taille des fragments secondaires est faible.

4 Conclusion

Dans le contexte de la fragmentation solide, les travaux présentés témoignent de l'importance capitale de la compréhension du champ de contrainte et de déformation menant à la brisure. Ainsi, la rupture d'une barre fragile constitue un parfait exemple de phénomène pour lequel la réponse élastique du matériau influe grandement sur le processus de fragmentation. C'est donc dans le but de mieux documenter l'instabilité de flambage dynamique que l'étude du repliement de l'élastique fût réalisée. Les résultats obtenus plaident pour le bon sens de ce type de démarche. Toutefois, la seule connaissance du problème d'élasticité ne permet d'interpréter les distributions de tailles de fragments que de manière partielle. Dès lors, la prise en compte du caractère probabiliste des critères de brisure devient impérative. Les expériences actuellement menées dans notre équipe ([13] et [14]) répondent à ces préoccupations.

Par ailleurs, l'étude du repliement de l'élastique présentent d'autres intérêts. Tout d'abord, nous avons pu compléter les premières observations de H.E. Lindberg, dont les travaux étaient les seuls jusque là à proposer une description du phénomène. De plus, l'étude de l'influence du milieu extérieur sur la propagation des fronts d'onde apparaît, à notre connaissance, comme le premier traitement d'un problème d'interaction entre la propagation d'ondes longitudinales dans un milieu élastique et un fluide environnant. Enfin, les mesures de longueurs d'onde de flambage mettent en évidence le passage continu d'un problème $2D$ à un problème $3D$. On observe ainsi une forte décroissance de la longueur d'onde de flambage lorsque celle-ci devient de l'ordre de l'épaisseur du matériau. Ce phénomène intervient lorsque l'élongation initiale de l'élastique est telle que la vitesse d'impact V devient comparable à la vitesse du son c dans le matériau. Dès lors, un simple élastique permet d'observer des dynamiques liées à des impacts soniques. La compréhension des impacts soniques, voire supersoniques, dans les caoutchouc revêt une grande importance dans le domaine du recyclage de ce type de matériaux, et des futurs travaux sur le sujet sont à prévoir.

Chapitre 3

Impacts sur des plaques fragiles

1 Introduction

Le problème de l'impact transverse sur une plaque revêt une importance particulière dans de grands nombres d'applications : tir d'obus sur des véhicules blindés, impacts d'oiseaux sur des ailes ou des coques d'aéronefs, résistance des pare-brise, collisions de débris avec des satellites... Il est donc logique de trouver un très grand nombre de travaux concernant ce thème. Ainsi, on peut trouver un tour d'horizon des études menées sur les problèmes d'impact dans la revue réalisée par G.G. Corbett & *al* [15]. Toutefois, la grande majorité de ces études se rapportent directement à des matériaux au comportement elasto-plastique ou élasto-viscoplastique que l'on trouve fréquemment dans les constructions civiles et militaires. Par conséquent, si le motif en étoile d'un éclat sur un pare-brise est connu de tous, les impacts sur les plaques fragiles n'ont motivé que peu d'études. Certaines études menées sur des plaques fragiles s'intéressent à l'aspect statistique de la fragmentation ([16]). D'autres démarches visent la compréhension du motif de brisure en fissures radiales, documenté dans les travaux de N. Shinkai, présentés dans [17] et de R.C. Bradt & *al* [18]. Par exemple, J. Åström & J. Timonen [19] ont développé une simulation numérique qui modélise sommairement une membrane fragile par un réseau de tiges élastiques, retrouvant qualitativement certains aspects du phénomène réel. Ils attribuent l'apparition de fissures radiales au couplage entre la flexion et les déformation dans le plan de la membrane. Cette vision est également présente dans le travail théorique de M. El-Raheb, qui envisage même une instabilité de flambage azimutal pour expliquer le motif de brisure en fissures radiales [20]. Cependant, là encore, aucune vérification expérimentale n'est effectuée. Si ces travaux ne proposent pas de réponse définitive au problème, ils ont néanmoins le mérite d'aborder le problème de la fragmentation des plaques fragiles comme résultant de la réponse élastique de la plaque.

L'étude phénoménologique présentée ici vise à documenter le plus précisément possible la fragmentation d'une plaque fragile sous impact. De nombreuses expériences furent conduites avec des plaques en polyméthacrylate de méthyle (dit PMMA) et en verre. Nous montrons les divers régimes de brisures observés en fonction des paramètres d'impact. En outre, nous nous intéressons plus particulièrement au motif de brisure en fissures radiales et nous soulignons plusieurs aspects caractéristiques

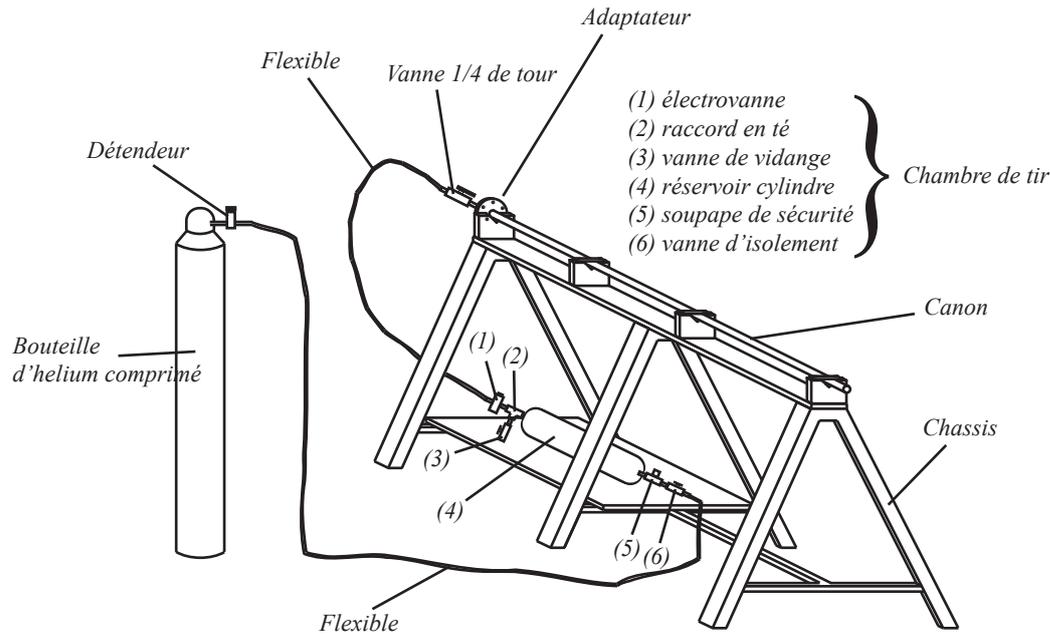


FIG. 3.1 – Schéma du canon à gaz comprimé.

du phénomène qui, à notre connaissance, n'ont jamais été documentés dans la littérature scientifique. Par ailleurs, nous montrons que les observations expérimentales sont cohérentes avec la théorie classique des plaques.

2 Présentation de l'expérience

Cette partie regroupe toutes les informations concernant les différents protocoles expérimentaux pratiqués lors de l'étude. Nous présentons également les propriétés des matériaux utilisés.

2.1 Dispositif Expérimental

La brisure ou la perforation d'un solide sous impact sont sans doute les types de problèmes de fragmentation solide qui trouvent le plus d'applications dans de nombreux domaines tels qu'industriels, militaires et de sécurité civile. Notre équipe de recherche ambitionne d'étudier au mieux ce genre de phénomènes : impacts sur des plaques fragiles, fragmentations de solides tridimensionnels, impacts supersoniques sur des caoutchoucs... De ce fait, nous devons nous doter d'un lance projectile répondant aux conditions suivantes :

- le lance projectile doit être fiable, capable d'effectuer un grand nombre de tirs à moindre coût ;
- il doit permettre de contrôler la vitesse d'impact ;
- sa vitesse d'impact maximale doit égaler ou dépasser la vitesse du son dans les caoutchoucs, de l'ordre de 250 m.s^{-1} ;
- il doit permettre l'utilisation de plusieurs types de projectiles, de dimensions et de formes variables.

Un canon à gaz comprimé tel que nous avons mis au point satisfait ces critères. Plusieurs travaux, dont nous nous sommes inspirés, décrivent la conception de canons à gaz comprimé destinés à l'expérimentation scientifique ([21], [22], [23] et [24]). La figure 3.1 montre un schéma du canon à gaz comprimé et son circuit pneumatique dans le cas d'une utilisation à grande vitesse d'impact. Pour atteindre les plus grandes vitesses de projection ($V \geq 100 \text{ m.s}^{-1}$), il est préférable d'utiliser un gaz dont la vitesse du son est grande devant la vitesse d'éjection souhaitée, ce qui justifie le choix de l'hélium pour lequel $c_g = 960 \text{ m.s}^{-1}$ dans des conditions normales de température et de pression. Le circuit pneumatique alimentant le canon est donc composé d'une bouteille d'hélium comprimé, raccordée à un détendeur, permettant le réglage de la pression en sortie de bouteille et donc le réglage de la vitesse d'éjection du projectile. En sortie du détendeur, on trouve un flexible raccordant la bouteille d'hélium à la partie du circuit que l'on pourrait qualifier de chambre de tir. En effet, par mesure de sécurité, il était nécessaire d'insérer un réservoir de gaz secondaire entre la bouteille d'hélium et le canon. Ceci permet d'isoler la bouteille d'hélium du canon afin que celle-ci ne puisse se vider en cas de panne de l'électrovanne. L'élément central de cette chambre de tir est un cylindre d'échantillonnage de gaz acceptant des pressions de travail jusqu'à 100 bar. En entrée de ce réservoir sont placées une soupape de sécurité tarée à 100 bar et une vanne à pointeau permettant d'isoler le cylindre de la bouteille d'hélium. En sortie, un raccord en té aboutit d'un côté à une électrovanne et de l'autre à une vanne à pointeau. La vanne à pointeau permet la vidange de la chambre de tir en cas de problème ou pour sécuriser le dispositif en fin d'utilisation. L'électrovanne commandée à distance sert à déclencher le tir lors de son ouverture, son temps de réponse est de l'ordre de 1 ms et elle accepte des pressions s'élevant jusqu'à 100 bar. A la sortie de cette vanne, un flexible raccorde la chambre de tir à une vanne quart de tour faisant office de dernière sécurité. Cette vanne est fixée à un adaptateur qui permet de relier le circuit pneumatique au canon. Ce dernier est constitué d'un tube en acier inoxydable étiré sans soudure au bout duquel est soudé une bague de fixation qui se visse à l'adaptateur en sortie de circuit pneumatique. A l'aide de guides en "V", le canon est solidement maintenu sur un châssis en acier assurant sa stabilité.

Le tube du canon peut être facilement changé dans le but de varier les dimensions du projectile. Les projectiles peuvent être de forme sphérique ou cylindrique, avec une gamme de rayons variant entre 3.5 mm et 20 mm. Dans le cas d'expériences avec des vitesses d'impact plus faibles $V \leq 100 \text{ m.s}^{-1}$, le canon peut être directement relié au circuit d'air comprimé du laboratoire via un détendeur et une électrovanne. De plus, un caisson en bois, non représenté sur le schéma, protège la bouteille d'hélium en cas de rebond du projectile.

La figure 3.2 montre un schéma illustrant la sortie du canon et la cible. Deux trous percés à l'extrémité du canon permettent le passage de faisceaux lasers destinés à la mesure de la vitesse d'éjection du projectile grâce à deux couples de diodes laser et photorécepteurs. Par mesure de sécurité pour l'expérimentateur et le matériel (caméra, éclairage...), la cible est placée dans un caisson dont les faces sont constituées de plaques de polycarbonate de 10 mm d'épaisseur. Le polycarbonate présente la qualité d'être très résistant aux impacts tout en possédant de très bonnes propriétés

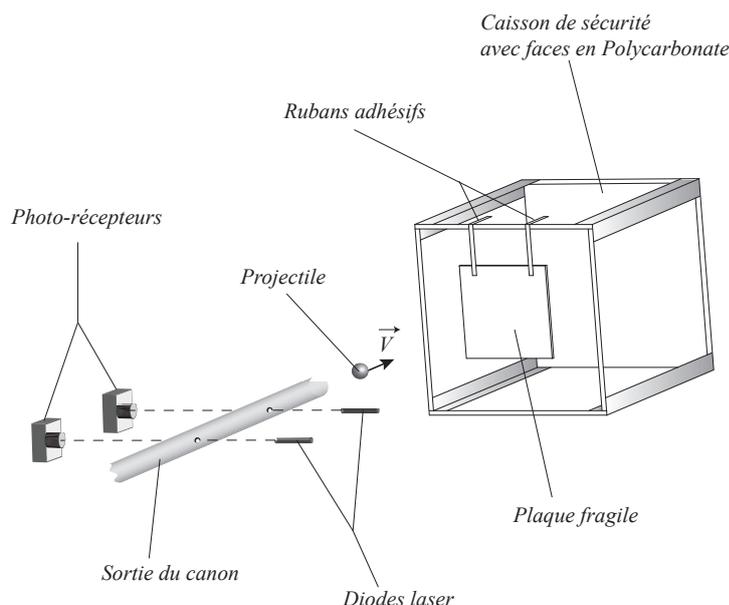


FIG. 3.2 – Schéma de la sortie du canon à gaz comprimé et de la cible.

optiques nécessaires à l'acquisition d'images. En fonction de la violence de l'impact souhaité, une plaque de plomb peut être placée au fond du caisson pour absorber le choc. Ainsi, le caisson transparent permet l'acquisition de films à l'aide d'une caméra rapide. Nous utilisons une caméra à haute cadence d'acquisition Photron et l'éclairage est réalisé à l'aide d'un spot HMI (Halogen Metal Iodide). Les différentes techniques d'éclairage sont illustrées sur la figure 3.3. La technique consistant à se servir des propriétés réfléchissantes des plaques fragiles (schéma (c)) permet de visualiser l'évolution des ondes de flexion après impact.

Dans le cadre de cette étude, la cible est une plaque fragile simplement pendue devant le caisson, retenue par des rubans adhésifs. En effet, nous nous intéressons ici à la formation du motif de rupture en étoile survenant à des temps de l'ordre de $10 \mu\text{s}$ après impact, c'est à dire à des temps inférieurs au temps mis par une onde pour atteindre le bord de l'échantillon depuis le point d'impact. Dès lors, pour le phénomène étudié, les conditions de bord sur la plaque n'ont aucune influence si les plaques sont suffisamment grandes. Ainsi, dans le cas du PMMA, la distance maximale parcourue par les ondes élastiques consécutives à l'impact pendant le temps caractéristique de rupture, $t = 10 \mu\text{s}$, est $l = 1.6 \text{ cm}$. Les plaques utilisées sont de forme carrée, de longueur de l'ordre de 10 cm et d'épaisseur comprise entre 0.5 mm et 2 mm . La position de la plaque est ajustée de manière à ce que le point d'impact soit centré et la distance à la sortie du canon (typiquement 1 m) est telle que le gaz expulsé parvienne à la cible dans un laps de temps grand devant le temps caractéristique du phénomène. De ce fait, le projectile atteint la plaque suffisamment longtemps avant le gaz. Enfin, l'erreur sur la mesure de vitesse du projectile à l'impact, vérifiée par imagerie rapide, est de l'ordre de 5% .

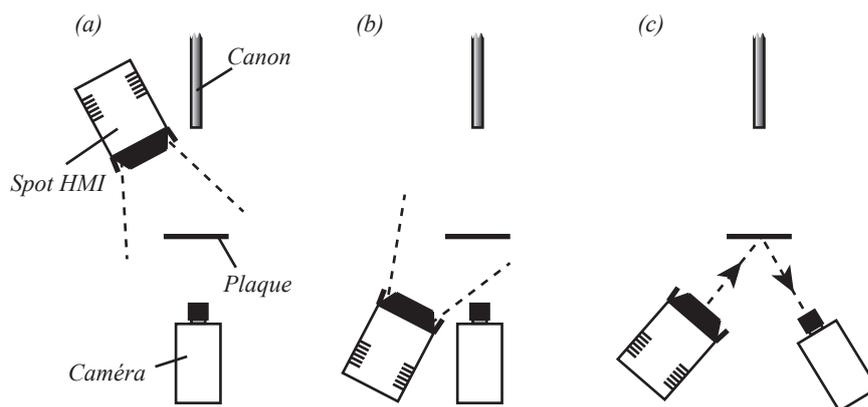


FIG. 3.3 – Schémas des techniques d'éclairage lors de l'acquisition des films. Le caisson de sécurité n'est pas représenté par souci de simplicité. (a) Rétro-éclairage utilisé avec des plaques transparentes teintées. (b) Eclairage direct utilisé avec des plaques opaques. (c) Eclairage par réflexion.

2.2 Matériaux utilisés

Les projectiles

Au cours de ces travaux nous avons utilisé deux types de projectiles : des billes et des cylindres en acier à extrémité conique. Les billes sont constituées de différents matériaux : acier inoxydable, céramique et tungstène. L'utilisation de plusieurs matériaux permet de varier la masse de l'impacteur tout en conservant ses dimensions. Les densités respectives de l'acier, de la céramique et du tungstène sont 7.8, 3.9 et 14.9. Les cylindres à extrémités coniques se différencient par l'angle de leur pointe : 20°, 40° et 60°.

Les plaques fragiles

L'essentiel de l'étude a été effectuée avec des plaques en PMMA d'épaisseurs comprises entre 0.5 mm et 2 mm dont les propriétés mécaniques fournies par le fabricant sont inscrites dans le tableau 3.1. Par ailleurs, nous avons également utilisé du verre de chantier ordinaire d'épaisseur 2 mm. Toutefois les expériences pratiquées sur le verre n'ont qu'un but qualitatif et les propriétés du verre reportées dans le tableau sont celles généralement observées pour ce type de matériau. On note E le module d'Young, ρ la masse volumique, ν le module de Poisson, c la vitesse du son dans le milieu et σ_c la contrainte critique.

	E (GPa)	ρ (kg.m ⁻³)	ν	c (m.s ⁻¹)	σ_c/E
PMMA	3.3	1190	0.39	1600	2.3×10^{-2}
Verre	69	2500	0.2	5200	5.8×10^{-4}

TAB. 3.1 – Propriétés des matériaux utilisés

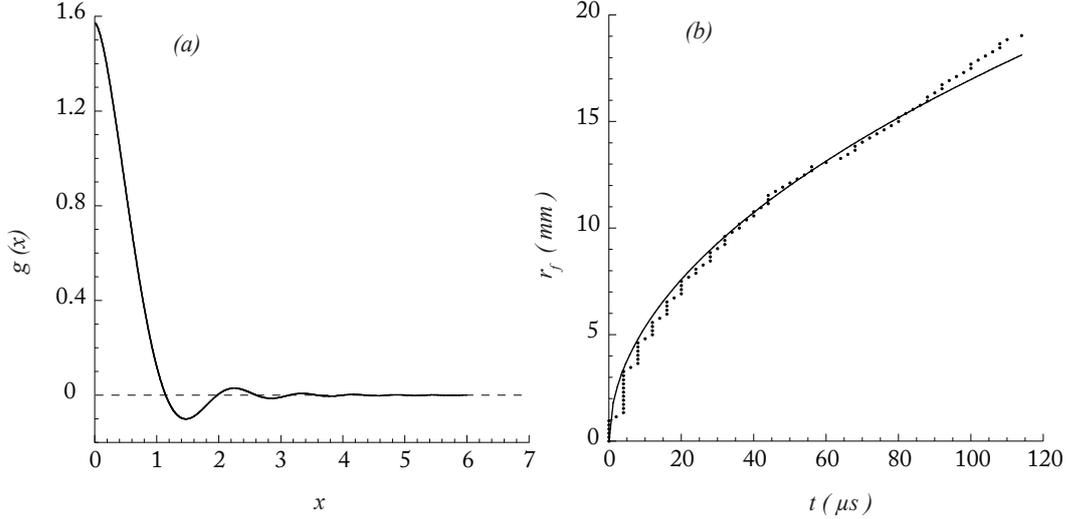


FIG. 3.4 – (a) Variation de la fonction g . (b) Position r_f du front de flexion en fonction du temps. Les points correspondent aux mesures et la courbe en trait continu représente le fit par une fonction $(4b_{\text{fit}}t)^{1/2}$. Le fit donne $b_{\text{fit}} = 0.68 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ tandis que celui prédit par la théorie est $b = 0.52 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$.

3 Éléments de théorie

Avant de présenter nos observations expérimentales, nous effectuons ici un bref rappel des résultats théoriques classiques relatifs à l'impact d'un projectile sur une plaque. De plus, nous montrons que des considérations simples sur la décélération du projectile au contact de la plaque permettent d'estimer un seuil de brisure.

3.1 Réponse d'une plaque élastique à un impact ponctuel

Le calcul de la réponse d'une plaque élastique soumise à un forçage est réalisé en détails dans l'ouvrage de K.F. Graff, *Wave motion in elastic solids* [25], à partir de l'équation classique des plaques :

$$D\nabla^4\xi(r,t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(r,t) = q(r,t) \quad (3.1)$$

dans laquelle ξ est la déformation transverse de la plaque, h l'épaisseur, q est le forçage et $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$. En considérant pour forçage un échelon de vitesse V appliqué ponctuellement en $r = 0$, la solution pour la déformation transverse de la plaque est la suivante :

$$\xi(r,t) = \frac{2}{\pi} Vt g\left(\frac{r}{\sqrt{4bt}}\right) \quad (3.2)$$

dans laquelle $b^2 = D/(\rho h)$, homogène à un coefficient de diffusion, et g est une fonction définie de la manière suivante,

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - Si(x^2) - \sin(x^2) + x^2Ci(x^2) \quad (3.3)$$

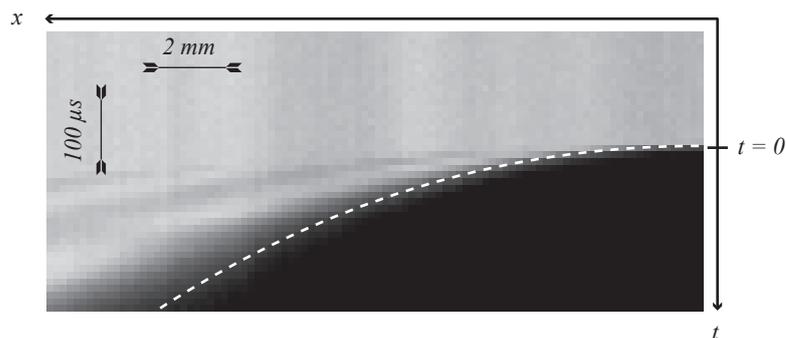


FIG. 3.5 – Diagramme spatio-temporel montrant l'évolution de l'onde de flexion en fonction du temps. La position du front de flexion, qui correspond au fit de la figure 3.4 (b), est repérée par la ligne en pointillés. Les zones d'ombres plus claires correspondent aux précurseurs.

Les fonctions sinus intégral et cosinus intégral, respectivement notées Si et Ci , sont définies comme suit :

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(u)}{u} du \quad (3.4)$$

$$Ci(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos(u)}{u} du \quad (3.5)$$

La solution (3.2) correspondrait à l'impact ponctuel d'un objet de masse très grande devant celle de la plaque, si bien que la vitesse V du projectile est considérée comme constante. La figure 3.4 (a) montre l'allure de la fonction g . Ainsi, on observe que la solution de l'impact ponctuel présente une forme conique au voisinage du point d'impact avec des précurseurs d'amplitude décroissante en fonction de la distance. La variable sans dimension $r^2/(4bt)$ suggère que la largeur du cône varie comme la racine carrée du temps. Ceci est en bon accord avec les observations expérimentales, comme en témoigne la figure 3.4 (b). En effet, on peut considérer la base du cône décrit par la fonction g comme un front de flexion repéré par sa position $r_f = (4bt)^{1/2}$. La mesure de la position de ce front de flexion se réalise expérimentalement grâce à un éclairage par réflexion, décrit sur la figure 3.3 (c) : la région non déformée de la plaque apparaît claire, alors que la partie fléchie de la plaque apparaît obscure. Les images alors enregistrées permettent de créer un diagramme spatio-temporel (voir figure 3.5) montrant l'évolution de ce front de flexion qui, rappelons le, correspond à la base du cône émergeant du point d'impact. On note également la présence de précurseurs.

3.2 Estimation du seuil de brisure

Une expérience qualitative simple, permet de se convaincre de l'importance de la réponse flexionnelle de la plaque pour que celle-ci puisse se fragmenter. En effet, si on pose la plaque fragile sur une surface très rigide, la plaque n'est plus libre de se déformer dans la direction transverse. Dans une telle situation, des expériences sur des plaques en PMMA montrent que des paramètres d'impact qui, d'ordinaire, mèneraient à la brisure de l'échantillon, ne causent alors aucun dégât, si ce n'est

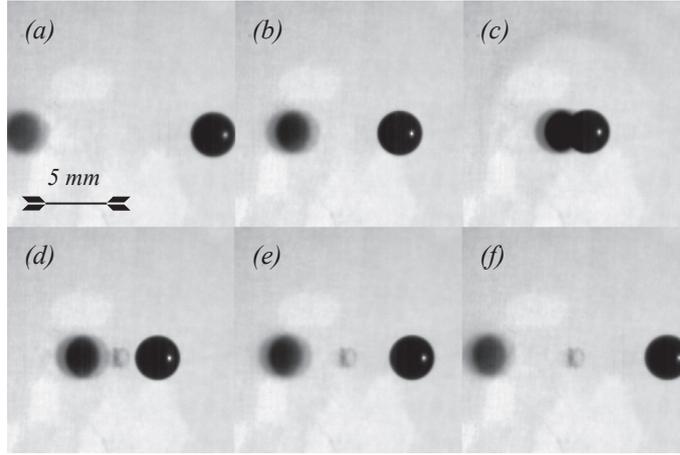


FIG. 3.6 – Impact d’une bille d’acier de diamètre 3.5 mm sur une plaque de PMMA d’épaisseur 1 mm. La plaque est appuyée contre une plaque d’acier épaisse de 20 mm, ce qui limite sa déformation transverse. La vitesse d’impact est de $V = 30 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui causerait la brisure de la plaque si elle était libre de se déformer. Chaque image est séparée de 0.16 ms. A partir de (d), on peut voir l’endommagement Hertzien dû à l’impact.

un endommagement dans la région de contact Hertzien. La figure 3.6 montre une telle expérience. Dès lors, on comprend que c’est la déformation flexionnelle et, par conséquent, la pénétration du projectile au travers de la plaque qui sont à l’origine des motifs de brisure en fissures radiales décrits plus loin.

De ce fait, lorsque le projectile ne cause pas la fragmentation d’une plaque fragile, c’est qu’il ne pénètre pas suffisamment à travers cette dernière. En utilisant les résultats théoriques exposés en 3.1, nous pouvons faire une étude simplifiée de la décélération du projectile au contact de la plaque. Lorsque la plaque subit un impact ponctuel, elle se déforme suivant un cône qui se propage comme $r_f = (4bt)^{1/2}$. Nous faisons l’approximation que la surface de la plaque mise en mouvement est délimitée par r_f et que chaque point matériel de la région en mouvement est animé d’une vitesse $v(t)$, identique à celle de l’impacteur. Dans ces conditions, la masse de la région en mouvement de la plaque s’exprime comme

$$M = 4\pi\rho hbt \quad (3.6)$$

Si nous considérons que la plaque est au repos au delà du cône de flexion repéré par r_f , la conservation de la quantité de mouvement du système regroupant le projectile de masse m et la plaque s’écrit alors

$$\frac{d}{dt} \{ (m + M) v \} = 0 \quad (3.7)$$

ce qui aboutit à l’équation différentielle suivante pour la vitesse du projectile,

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{t + \tau} \quad (3.8)$$

dont la solution est

$$v(t) = \frac{V}{1 + t/\tau} \quad (3.9)$$

où V est la vitesse d'impact initiale et τ le temps caractéristique de la décélération du projectile qui, en utilisant la définition de b donnée dans la partie 3.1, s'exprime de la manière suivante :

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{\pi \rho h^2 c} \quad (3.10)$$

Pour une plaque de PMMA d'épaisseur 1 mm et une bille d'acier de masse 0.38 g (ce qui correspond à un diamètre de 4.5 mm), ce temps caractéristique est de l'ordre de $\tau = 50 \mu\text{s}$ et indépendant de la vitesse d'impact. Cette valeur est voisine du temps d'apparition des fissures (de l'ordre de $10 \mu\text{s}$ dans nos expériences). Le calcul du temps d'amortissement d'une sphère sur une plaque fût réalisé en 1941 par C. Zener [26]. Ce dernier tint compte de la contribution de l'ensemble des modes de flexion de la plaque pour calculer le coefficient de restitution de cette dernière suite à un impact. Le temps caractéristique de décélération du projectile τ_Z , obtenu par C. Zener, est donné par :

$$\tau_Z = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{m}{\rho h^2 c} \quad (3.11)$$

Le scaling est donc identique à notre calcul, mais le pré-facteur est environ 2.5 fois plus faible. Ainsi, la démarche de C. Zener, consistant à inclure la contribution de l'ensemble des modes de flexion de la plaque, tend à diminuer significativement le temps de décélération du projectile. Néanmoins, l'ordre de grandeur obtenu par l'expression 3.10 demeure satisfaisant. Grâce à la donnée du temps caractéristique du mouvement de la bille, nous pouvons définir un nombre sans dimension γ qui évalue le rapport d'aspect caractéristique du cône avant que le projectile ne soit amorti :

$$\gamma = \frac{V\tau}{r_f(\tau)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{V}{c}\right) \left(\frac{m}{\rho h^3}\right)^{1/2} \quad (3.12)$$

L'allongement caractéristique dû à la déformation conique de la plaque s'écrit

$$\begin{aligned} \epsilon_\gamma &= \frac{((V\tau)^2 + r_f^2)^{1/2} - r_f}{r_f} \\ &= (\gamma + 1)^{1/2} - 1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

En calculant cette déformation nous n'émettons aucune hypothèse sur le mécanisme de rupture de la plaque, en particulier, nous ne cherchons pas à déterminer quelle déformation, entre ϵ_r et ϵ_θ , dépasse le seuil critique de brisure. Il s'agit seulement ici de déterminer un ordre de grandeur des déformations dues à l'impact. Ceci permet d'estimer l'ordre de grandeur des paramètres pour franchir le seuil de rupture. Ainsi, on s'attend à ce que la plaque se fragmente si $\epsilon_\gamma = \epsilon_c$ où ϵ_c est l'allongement critique à la rupture du matériau. La vitesse d'impact au seuil V_s est alors facilement calculée à l'aide des relations 3.12 et 3.13 :

$$V_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\rho h^3}{m}\right)^{1/2} \left((1 + \epsilon_c)^2 - 1\right) c \quad (3.14)$$

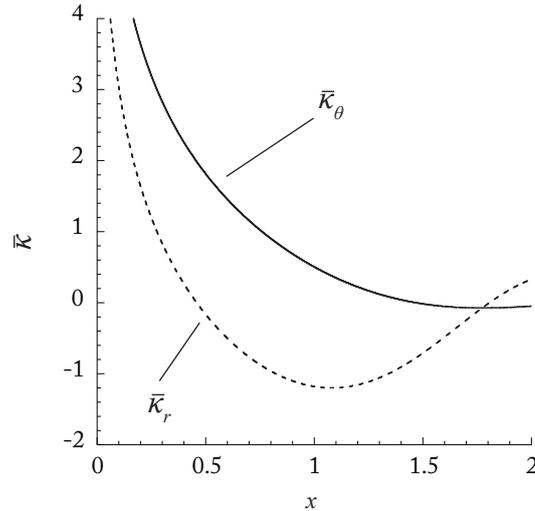


FIG. 3.7 – Variation des courbures sans dimensions, la courbe en trait continu représente $\bar{\kappa}_\theta$, celle en pointillés représente $\bar{\kappa}_r$.

L’allongement critique fourni par le fabricant du PMMA est $\epsilon_c \sim 0.05$, pour le verre, il est de l’ordre de $\epsilon_c \sim 10^{-3}$. Typiquement, dans nos expériences sur les plaques de PMMA, le seuil de rupture observé pour des plaques d’épaisseur 1.5 mm heurtées par des billes d’acier de diamètre 3.5 mm se situe à $V \sim 16 \text{ m.s}^{-1}$. Dans ces conditions d’impact, la relation 3.14 donne $V_s = 14.5 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui est une bonne prédiction du seuil. Plus généralement, pour le PMMA, les expériences montrent qu’au voisinage du seuil, la déformation caractéristique est telle que $0.03 \leq \epsilon_\gamma \leq 0.07$, ce qui constitue une bonne estimation de la déformation critique à la rupture. Pour une plaque de verre d’épaisseur 2 mm heurtée par une bille d’acier de diamètre 9 mm, notre calcul envisage une vitesse d’impact au seuil $V_s = 1 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui correspond à l’ordre de grandeur observé expérimentalement. De ce fait, le modèle simple développé plus haut, permet d’estimer le seuil de brisure en bon accord avec les expériences.

3.3 Origine du motif de brisure en fissures radiales

Comme nous le montrerons dans la parties 4.1 et 5.2, pour une certaine gamme de vitesses d’impact, la fragmentation d’une plaque fragile s’opère via un mode de brisure qui présente des fissures radiales. La solution classique pour les impacts ponctuels, présentée dans la partie 3.1, fournit une explication au fait que les premières brisures observées se développent dans la direction radiale.

Soient κ_r et κ_θ les courbures de la plaque dans les directions radiale et azimutale respectivement. En considérant la forme axi-symétrique de la plaque donnée par le déplacement transverse calculé en 3.2, ces courbures sont définies de la manière suivante,

$$\kappa_r = \frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial r^2} \quad (3.15)$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(r, t)}{\partial r} \quad (3.16)$$

On peut ainsi calculer l'allongement radial et azimutal sur la face de la plaque opposée au point d'impact :

$$\epsilon_r = \frac{Vh}{2\pi b} \bar{\kappa}_r \left(\frac{r}{\sqrt{4bt}} \right) \quad (3.17)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{Vh}{2\pi b} \bar{\kappa}_\theta \left(\frac{r}{\sqrt{4bt}} \right) \quad (3.18)$$

où $\bar{\kappa}_r$ et $\bar{\kappa}_\theta$ sont des fonctions définies par

$$\bar{\kappa}_r(x) = Ci(x^2) + \frac{\sin(x^2)}{x^2} \quad (3.19)$$

$$\bar{\kappa}_\theta(x) = Ci(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2} \quad (3.20)$$

La figure 3.7 montre les variations des courbures sans dimension $\bar{\kappa}_r$ et $\bar{\kappa}_\theta$. On remarque qu'au voisinage du point d'impact, c'est la courbure dans la direction azimutale qui est la plus importante, ce qui correspond à un allongement azimutal ϵ_θ supérieur à l'allongement radial ϵ_r . Ceci est cohérent avec le fait que les premières brisures s'opèrent dans la direction radiale, du fait que les fissures ont tendance à se développer dans une direction orthogonale à la direction du chargement. De plus, c'est au voisinage du point d'impact que les courbures sont les plus grandes : elles divergent dans le cas de l'impact ponctuel. Ceci est en accord avec l'observation expérimentale qui montre que les fissures naissent au voisinage du point d'impact.

3.4 Résumé des remarques théoriques

La théorie classique prédit donc une déformation conique de la plaque en réponse à un impact ponctuel. La base du cône, assimilable à un front de flexion, croît comme la racine carrée du temps et s'étend vers les bords de la plaque. En outre, la position de ce front de flexion ne dépend pas de la vitesse d'impact, mais seulement des propriétés et de l'épaisseur de la plaque. En exploitant ces résultats, une étude simple de la décélération du projectile au contact de la plaque permet de prédire un seuil de brisure en fonction des paramètres d'impact. Par ailleurs, la déformation théorique de la plaque élastique présente une courbure azimutale plus importante au voisinage du point d'impact. Ainsi, le profil de déformation prédit par la théorie classique permet à lui seul d'envisager les motifs de brisure en fissures radiales observés expérimentalement. En outre, le profil de déformation est cohérent avec le fait que les premières fissures se développent au voisinage du point d'impact et dans la direction radiale. En revanche, cette théorie ne permet pas de s'affranchir de la singularité en $r = 0$. La prise en compte de la rotation des sections et du cisaillement corrigerait cela en introduisant l'épaisseur de la plaque comme longueur de coupure. Par ailleurs, le modèle classique ne permet pas d'obtenir le couplage entre les déformations de flexion et l'élongation dans le plan, contrairement à une modélisation de type Föppl-von Kármán. Dès lors, nous ne pouvons définir un mécanisme de sélection du nombre de fissures radiales consécutives à l'impact.

4 Impacts sur des plaques de PMMA

Lorsqu'un projectile est lancé sur une plaque élastique, celle-ci répond à l'impact par une déformation en flexion. Dans le cas d'une plaque fragile, si la quantité de mouvement du projectile est suffisante, la réponse flexionnelle conduit à des déformations telles que la plaque rompt. Ainsi, l'onde de flexion, émergeant du point d'impact et conférant à la plaque un profil conique, provoque l'apparition de fissures radiales qui se propagent vers les bords de la plaque. En fonction des paramètres d'impact (masse et vitesse du projectile) et des propriétés du matériaux (masse, épaisseur, vitesse des ondes élastiques, contrainte de rupture, hétérogénéités ...) d'autres brisures secondaires peuvent apparaître. Dans cette partie, nous décrivons la riche phénoménologie qui accompagne les processus de fragmentation d'une plaque de PMMA soumise à un impact transverse. Les observations expérimentales montrent l'existence de divers régimes de fragmentation liés à la vitesse d'impact du projectile.

4.1 Fragmentation avec fissures radiales

Lorsque la quantité de mouvement du projectile dépasse le seuil nécessaire à la brisure de l'échantillon, on observe la naissance de fissures émergeant sur la face opposée de la plaque, au niveau du point d'impact, et se propageant dans la direction radiale. La figure 3.8 illustre bien ce régime de fragmentation. Ainsi, consécutivement à l'impact repéré par l'instant t_i , la première brisure intervient à un temps critique t_c tel que la durée $t_c - t_i$ est de l'ordre de la résolution temporelle minimale de la caméra rapide pour les épaisseurs de plaques testées, soit $t_c - t_i \sim 10 \mu\text{s}$. Dans le cas de la figure 3.8, l'impact résulte en la création de $n = 5$ fissures radiales qui, dans les premiers instants du phénomène, se propagent à une vitesse comparable à la vitesse du son dans le milieu. A des temps de l'ordre de 0.2 ms après impact, la progression des fissures est nettement ralentie, (voir vignettes (f) à (h)), et l'ouverture du motif à cinq branches devient intermittente, rythmée par les rebonds des ondes de flexion aux bords de la plaque. Si les dimensions de la plaque sont suffisamment petites, les fissures peuvent gagner les bords de celle-ci (voir vignette (i)). Par ailleurs, aucune brisure secondaire n'est observée. Bien entendu, des motifs de fragmentation en fissures radiales autres que $n = 5$ sont observés dans nos expériences (cf figure 3.10).

Un motif de brisure régulier

L'aspect le plus frappant du phénomène est la régularité avec laquelle sont distribuées les fissures radiales. En effet, dans la plupart des expériences réalisées, les motifs de brisure présentent des fissures réparties plus ou moins régulièrement. C'est cette régularité des motifs qui, dans un premier temps, nous a conduit à interpréter la fragmentation d'une plaque fragile comme le résultat d'une instabilité élastique de type flambage dynamique. D'ailleurs, cette idée a motivé l'étude des impacts sur les membranes élastiques présentée dans le chapitre 4. De même, on peut citer les travaux théoriques de M. El-Raheb qui, à notre connaissance, sont les seuls à proposer un scénario dans lequel une instabilité de flambage dynamique azimuthal expliquerait la brisure en fissures radiales [20]. Le principe est analogue à celui qui lie le flambage

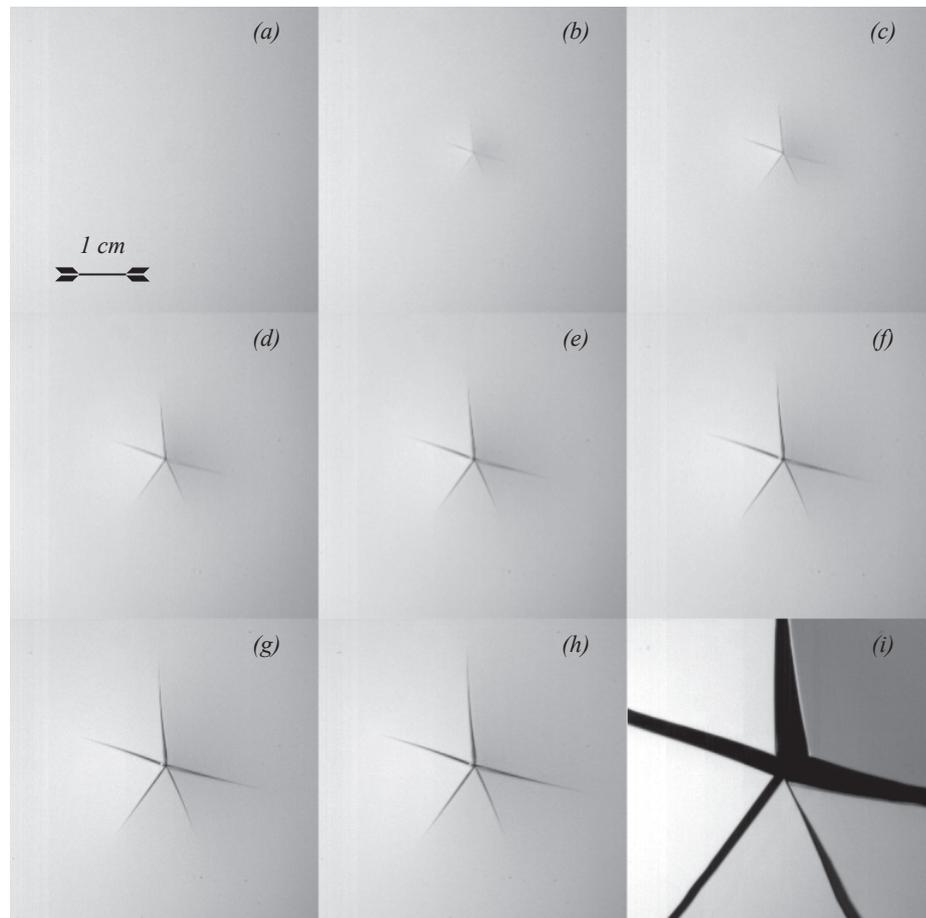


FIG. 3.8 – Impact d’une bille d’acier de 4.76 mm de diamètre sur une plaque en PMMA blanche d’épaisseur 1 mm et de longueur 10 cm. La vitesse d’impact est $V = 35 \text{ m.s}^{-1}$. Le temps d’amortissement de la bille est de l’ordre de $\tau = 65 \mu\text{s}$. (a) à (h) Les images sont séparées de $33.3 \mu\text{s}$. On observe la propagation de cinq fissures radiales depuis le point d’impact. La bille ne possède pas suffisamment de quantité de mouvement pour traverser la plaque. (i) Image relevée 2 ms après l’image (h) : Les fissures ont rejoint les bords de la plaque, celle-ci se brise en cinq fragments.

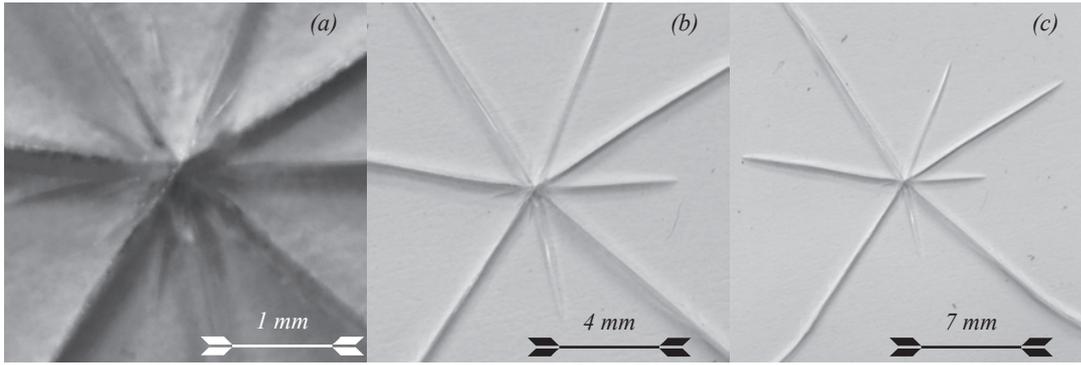


FIG. 3.9 – Résultat de l’impact d’une bille d’acier de 3.5 mm de diamètre lancée à $V = 62 \text{ m.s}^{-1}$ sur une plaque en PMMA transparent d’épaisseur 1.5 mm. Les images montrent le même motif de brisure relevé avec des grossissements décroissants. (a) Au voisinage immédiat du point d’impact, on peut distinguer huit fissures radiales principales ainsi que plusieurs fissures qui ne se sont pas propagées sur toute l’épaisseur de la plaque. (b) Lorsque la distance au point d’impact augmente, on observe un nombre plus faible de fissures. Ici, seules cinq fissures se sont propagées au delà des limites de l’image. (c) A un grossissement plus faible, seules trois fissures se sont propagées au delà des limites de l’image.

dynamique d’une barre (voir chapitre 2) à sa brisure : les fissures naîtraient aux sommets des plissements provoqués par l’instabilité de flambage. Toutefois, pour des raisons qui seront exprimées dans le chapitre 4, la phénoménologie associée à l’instabilité élastique observée lors d’impacts sur des membranes s’écarte de celle des plaques fragiles sur plusieurs points cruciaux. Par ailleurs, contrairement aux membranes, cette instabilité de flambage dynamique azimutal n’a jamais été observée expérimentalement dans le cas des plaques. Ainsi, nous avons pratiqué un grand nombre de tests afin de visualiser cette instabilité (impacts sur de fines plaques de polycarbonate entre filtre polariseurs croisés), toujours sans succès. De plus, le fait que les fissures se développent toutes du côté opposé à la face subissant l’impact, ne plaide pas pour une instabilité de flambage qui présenterait une déformation avec des courbures alternées. Enfin, si les prédictions théoriques de M. El Raheb [20] s’avéraient pertinentes, dans tous les cas l’instabilité de flambage de la plaque interviendrait à des temps supérieurs aux temps de brisure observés expérimentalement. En effet, si on considère $\tau_p = h/c$ comme un temps caractéristique associé à la plaque, le temps d’observation de l’instabilité décrite par M. El-Raheb serait de l’ordre de $100 \tau_p$, tandis que les temps de brisure observés avec le PMMA sont de l’ordre de $5 \tau_p$. C’est pourquoi nous avons écarté l’idée d’une instabilité élastique sélectionnant un mode azimutal de la plaque et menant à sa brisure. De plus, nous verrons dans la partie 5 que d’autres arguments peuvent expliquer l’apparente régularité d’un réseau de fissures.

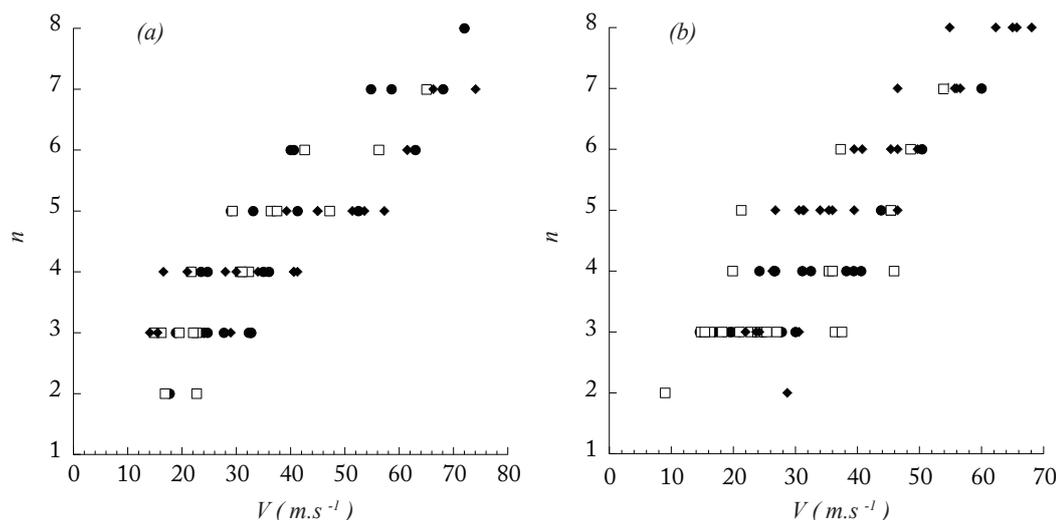


FIG. 3.10 – (a) Nombre de fissures radiales N en fonction de la vitesse d’impact V pour des billes de différentes masses. Les billes ont un diamètre de 4.5 mm et les plaques sont en PMMA d’épaisseur 1.5 mm. Les losanges noirs, ronds noirs et carrés blancs représentent respectivement les mesures pour des billes en céramique, acier et tungstène. Les billes en céramique possèdent une densité de 3.9, celles en acier 7.8 et celles en tungstène 14.9. (b) Nombre de fissures radiales N en fonction de la vitesse d’impact V pour différents rapports d’aspect entre diamètre des billes et épaisseur des plaques. Les billes utilisées sont en acier et les plaques sont en PMMA. Les losanges noirs, ronds noirs et carrés blancs représentent respectivement les mesures pour des rapports d’aspect d/h de 2.33, 7 et 18, où d est le diamètre de la bille et h l’épaisseur de la plaque.

Evolution du nombre de fissures avec la distance au point d’impact

Régularité seulement apparente loin du point d’impact. En effet, un autre aspect remarquable du phénomène est le fait que toutes les fissures radiales ne progressent pas jusqu’à la même distance. En outre, on observe souvent au voisinage du point d’impact un certain nombre de fissures radiales qui se sont seulement propagées sur une distance proche du rayon de l’impacteur. De plus, ces fissures ne parviennent pas à s’étendre à toute l’épaisseur de la plaque et semblent réparties aléatoirement. Ainsi, le nombre de fissures radiales diminue avec la distance au point d’impact jusqu’à atteindre un nombre final n . La figure 3.9 illustre ce type de comportement : sur la vignette (a) on distingue, outre les fissures principales, de nombreuses petites fissures propagées sur des distances courtes sans atteindre toute l’épaisseur de la plaque. Plus on s’éloigne du point d’impact, moins on dénombre de fissures ((b) et (c)) et plus leur répartition semble uniforme. Ce comportement est encore plus net dans le cas des plaques en verre (*cf* partie 5). Ainsi, lorsque nous évoquons un motif de rupture à n fissures, nous ne comptons que les fissures s’étendant à toute l’épaisseur de la plaque ce qui donne $n = 8$ dans le cas de la figure 3.9.

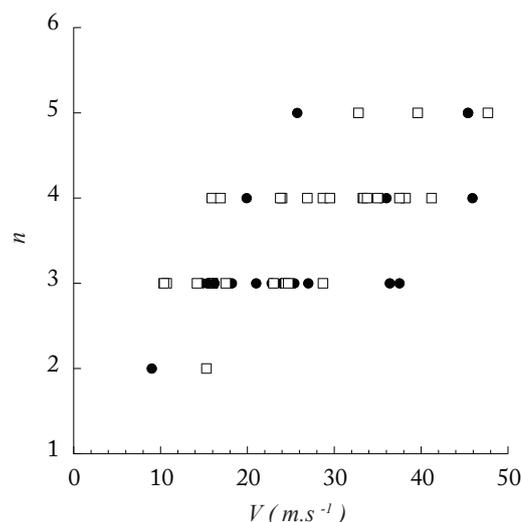


FIG. 3.11 – Nombre de fissures radiales N en fonction de la vitesse d’impact V pour des billes de diamètre 9 mm et un impacteur conique d’angle au sommet 20° . Les plaques utilisées sont en PMMA d’épaisseur 0.5 mm. Les ronds noirs représentent les mesures réalisées avec les billes, les carrés blancs représentent celles effectuées avec le cône.

Dépendance du nombre de fissures aux paramètres d’impact

La figure 3.10 montre les mesures du nombre de fissures radiales n en fonction de la vitesse d’impact V pour des plaques en PMMA heurtées par des billes. Le premier résultat important réside dans la nette dépendance du nombre n à la vitesse d’impact. Ainsi, le nombre de fissures radiales croît avec la vitesse du projectile. De plus, la plage de variation de n est assez restreinte : $2 \leq n \leq 9$. Par ailleurs, on observe une assez grande dispersion sur les mesures.

La figure 3.10 (a) compare les résultats obtenus pour des billes de masses différentes mais de diamètre identique. Entre les billes en céramique et celles en tungstène, nous avons fait varier la masse des impacteurs de près d’un facteur 4 sans résultat notable sur la sélection du nombre de fissures. Cela indique qu’une fois le seuil de quantité de mouvement dépassé pour entrer dans un régime de fragmentation, la vitesse du projectile est le seul paramètre d’impact influant sur la sélection du nombre de fissures. Ceci est confirmé par les résultats de la figure 3.10 (b) qui montrent que le rapport d’aspect entre le diamètre de la bille et l’épaisseur de la plaque n’a pas d’influence significative sur la sélection. Par ailleurs, les résultats reportés dans la figure 3.11 indiquent que la forme du projectile n’agit pas significativement sur le nombre de fissures observées. En effet, aucune différence notable intervient entre les mesures effectuées avec un impacteur conique et une bille.

Néanmoins, la masse de l’impacteur joue un rôle important dans le motif de brisure final via la quantité de mouvement. En effet, c’est bien la conservation de la quantité de mouvement du système composé de l’impacteur et de la plaque qui détermine si le projectile est capable de perforer cette dernière. Dès lors, en cas de

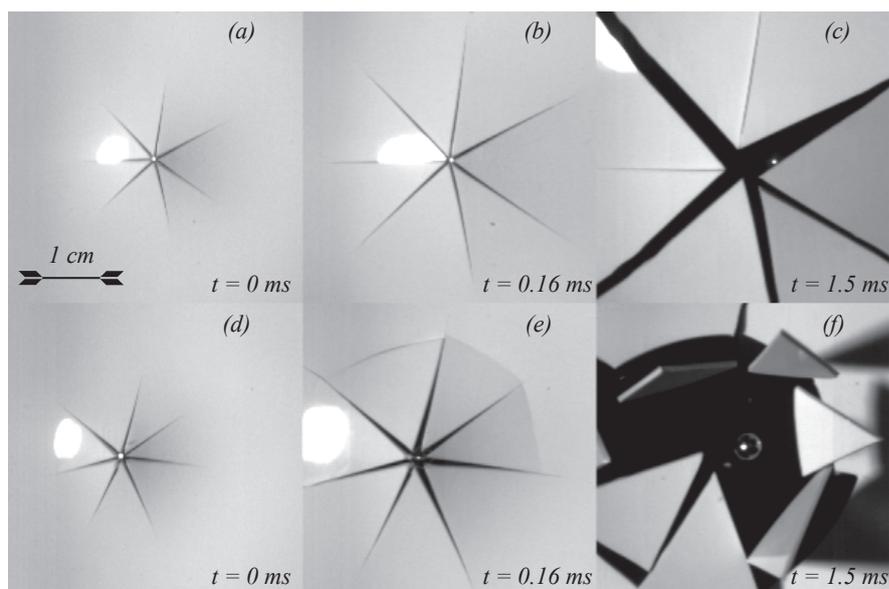


FIG. 3.12 – Impacts de billes de 4.5 mm de diamètre sur des plaques en PMMA blanc de 1 mm d'épaisseur. (a) à (c) Impact d'une bille en acier (densité 7.8) lancée à $V = 55 \text{ m.s}^{-1}$. La bille ne traverse pas la plaque. (d) à (f) Impact d'une bille en tungstène (densité 14.9) lancée à $V = 55 \text{ m.s}^{-1}$. La bille traverse la plaque.

perforation, des fissures secondaires peuvent apparaître et changer la distribution des fragments comme le montre clairement la figure 3.12. Ainsi, cette figure illustre deux expériences d'impact pour lesquelles seule la masse de la bille change. Dans les deux cas (bille en acier et bille en tungstène) on observe qu'à la vitesse d'impact donnée, le nombre initial de fissures radiales sélectionné est le même, $n = 7$. En revanche, sur les vignettes (c) et (f), on remarque que la bille en tungstène, de plus forte masse, traverse la plaque contrairement à la bille en acier de masse plus faible. De plus, l'interaction entre la bille traversante et la plaque résulte en un mode de brisure azimuthal secondaire, ce qui aboutit à une distribution de fragments très différente de celle obtenue avec la bille en acier, pourtant lancée à la même vitesse.

4.2 Fragmentation en fissures radiales et azimuthales

Lorsque la vitesse d'impact augmente, on passe à un régime de fragmentation pour lequel des fissures secondaires, se formant dans la direction azimuthale, s'ajoutent aux fissures radiales décrites précédemment. La figure 3.14 montre en détail la phénoménologie associée à ce régime qui apparaît pour des vitesses d'impact de l'ordre de $V = 50 \text{ m.s}^{-1}$ dans les expériences présentées.

Typiquement, la vitesse de propagation des fissures est liée à la vitesse du front de flexion, seulement dépendante des propriétés du matériaux. La figure 3.13 montre l'avancée d'une fissure dont la vitesse de propagation est bornée par celle du front de flexion. Ainsi, dans les instants suivant l'impact, la vitesse d'avancée des fissures ne dépend pas de la vitesse du projectile. En revanche, si la vitesse des ondes de flexion ne dépend pas de la vitesse d'impact, l'amplitude des déformations trans-

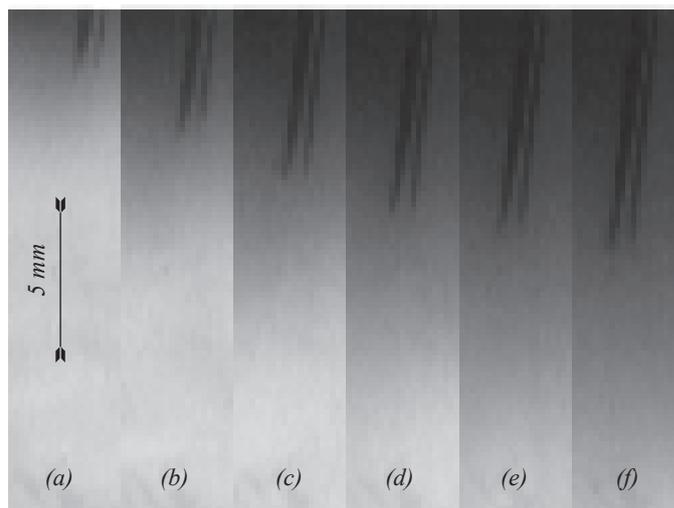


FIG. 3.13 – Progression d’une fissure après impact d’une bille d’acier de diamètre 3.5 mm sur une plaque de PMMA d’épaisseur 1.5 mm. Chaque image est séparée de 11.1 μ s. Un montage par réflexion est utilisé. La fissure apparaît en double à cause de la réflexion des deux faces de la plaque. La région sombre correspond au cône de flexion dû à l’impact, la zone claire correspond à la région de la plaque qui demeure plane. On remarque que la fissure suit le front de flexion.

verses, elle, en dépend. Dès lors, le rapport d’aspect du cône au voisinage du point d’impact doit varier comme V/c . De ce fait, lorsque la vitesse de l’impacteur est suffisante, l’amplitude de la déformation transverse devient telle que, localement à la base du cône, la courbure de la plaque dans la direction radiale dépasse le seuil de rupture : une brisure dans la direction azimutale est alors possible (voir figure 3.14 (g) à (i)). Cette explication est cohérente avec le fait que cette brisure secondaire s’opère d’autant plus rapidement, et par conséquent d’autant plus proche du point d’impact, que la vitesse du projectile est élevée. Ceci se vérifie bien sur la figure 3.15. Ainsi, l’impacteur traverse la plaque en laissant derrière lui un trou dont le diamètre décroît avec la vitesse d’impact. Par ailleurs, on observe que les brisures secondaires interviennent suffisamment tard pour que les fissures radiales initiales se propagent au delà du trou formé. Enfin, en comparant les figures 3.14 et 3.15, on observe que de nouvelles générations de fissures secondaires peuvent apparaître à mesure que la vitesse d’impact augmente (ici à partir de $V = 70 \text{ m.s}^{-1}$).

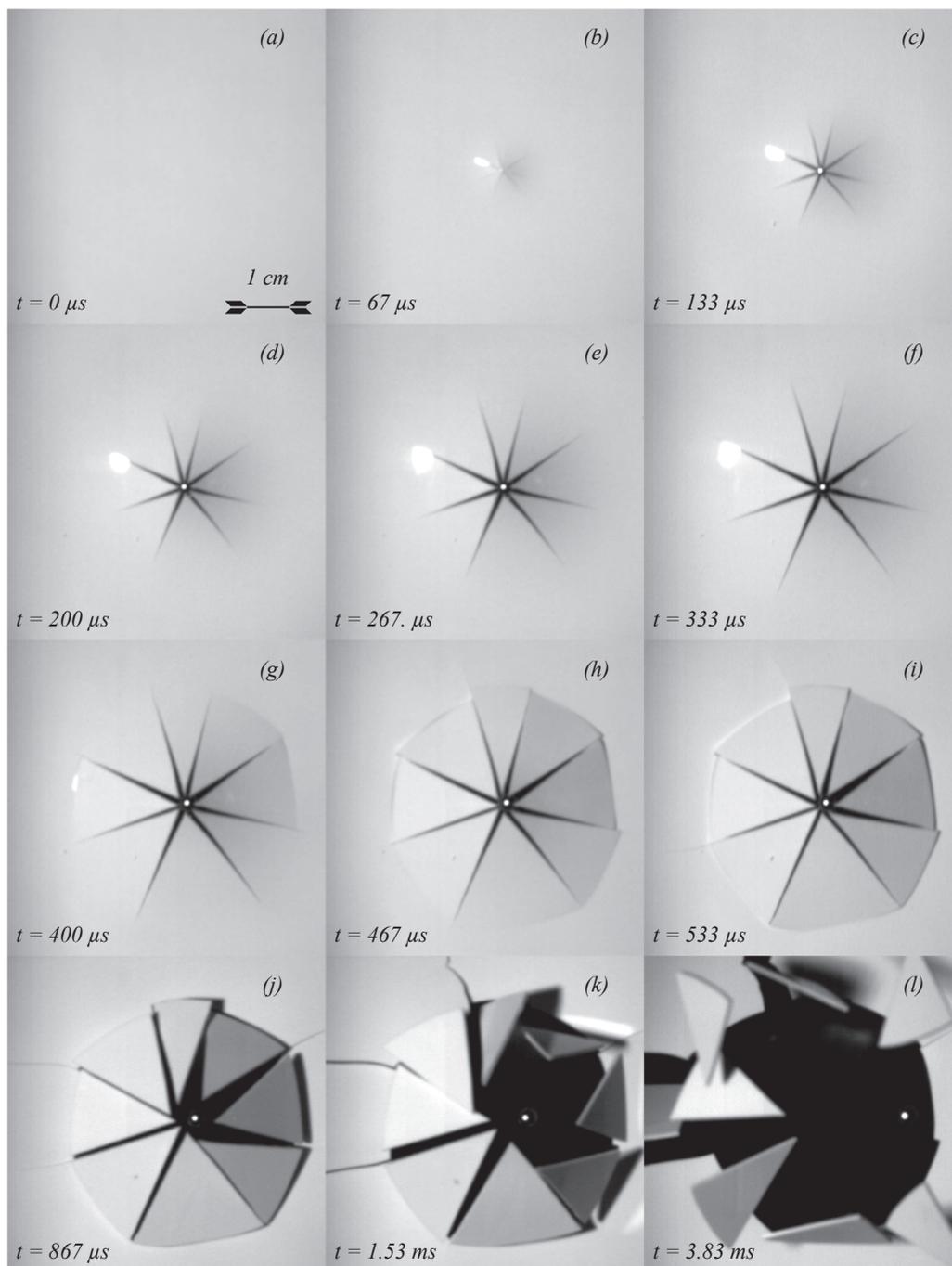


FIG. 3.14 – Impact d’une bille d’acier de 4.76 mm de diamètre sur une plaque en PMMA blanche d’épaisseur 1 mm et de longueur 10 cm. La vitesse d’impact est $V = 60 \text{ m.s}^{-1}$. Les instants correspondant aux images relevées sont indiqués sur la figure. (a) à (f) On observe la propagation de huit fissures radiales depuis le point d’impact. (g) à (i) A mesure que la bille traverse la plaque, des fissures secondaires apparaissent dans la direction azimuthale. (j) à (l) Les pétales formés se détachent de la plaques laissant un trou dont le diamètre est plusieurs fois égal à celui de l’impacteur. Certaines fissures radiales initiales se propagent au delà de ce trou. La bille traverse la plaque.

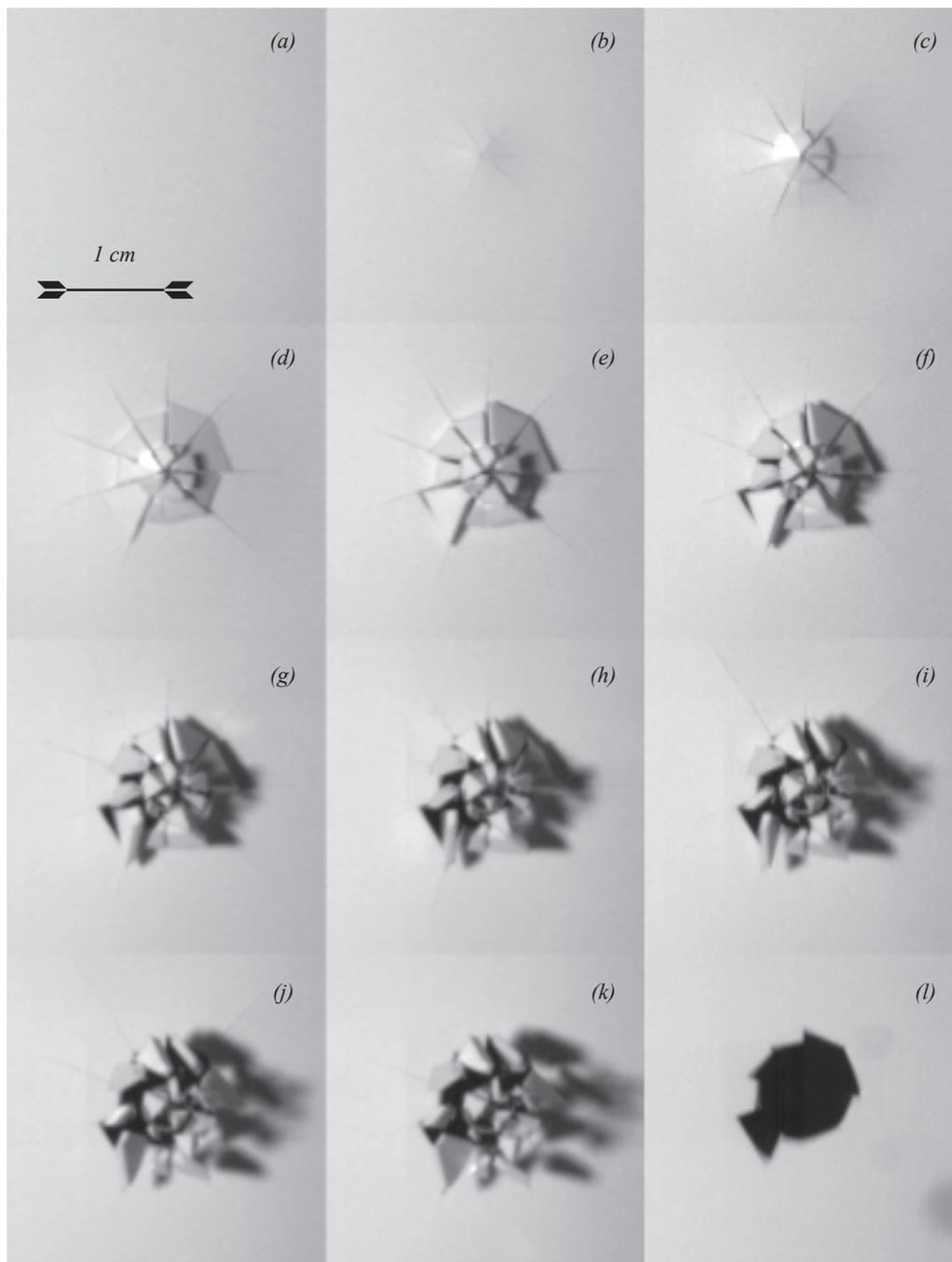


FIG. 3.15 – Impact d’une bille d’acier de 4.76 mm de diamètre sur une plaque en PMMA blanche d’épaisseur 1 mm et de longueur 10 cm. La vitesse d’impact est $V = 72 \text{ m.s}^{-1}$. (a) à (k) Les images sont séparées de $33.3 \mu\text{s}$. On observe la propagation de neuf fissures radiales depuis le point d’impact. Deux générations de brisures secondaires, observées en (c) et (d), apparaissent dans la direction azimutale augmentant le nombre de fragments et laissant un trou dans la plaque. (l) Image de la plaque à la fin de l’expérience. La bille a traversé la plaque, laissant derrière elle un trou irrégulier dont le diamètre est sensiblement inférieur à celui observé dans l’expérience de la figure 3.14. Certaines fissures radiales initiales se sont propagées au delà de ce trou.

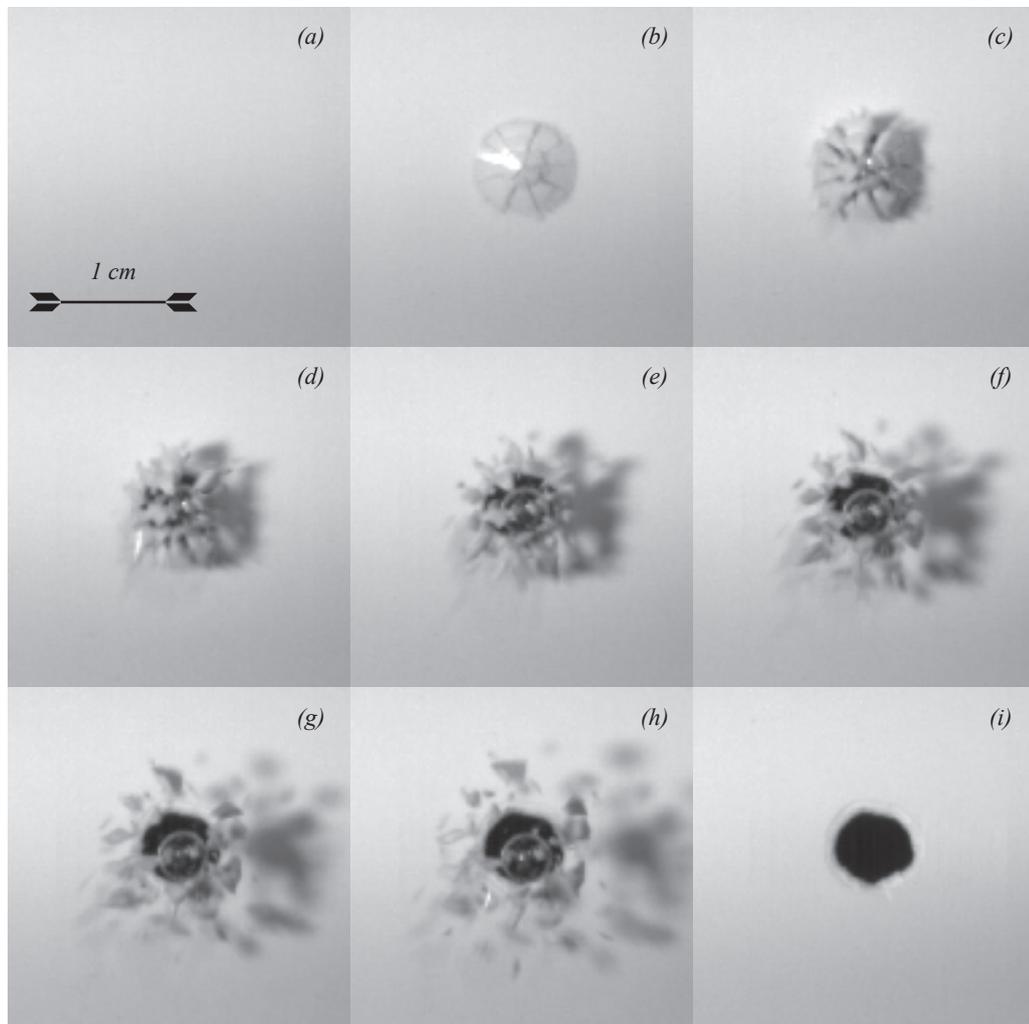


FIG. 3.16 – Impact d’une bille d’acier de 4.76 mm de diamètre sur une plaque en PMMA blanc d’épaisseur 1 mm et de longueur 10 cm. La vitesse d’impact est $V = 116 \text{ m.s}^{-1}$. (a) à (h) Les images sont séparées de $33.3 \mu\text{s}$. (b) On observe l’apparition de fissures radiales et de nombreuses fissures secondaires dans la direction azimuthale. Ceci résulte en un grand nombre de petits fragments, (c) à (h). (i) Image de la plaque en fin d’expérience. On observe un trou dont le diamètre est comparable à celui de la bille. De plus, aucune fissure radiale initiale ne s’est propagé au delà de ce trou.

4.3 Fragmentation aux grandes vitesses d'impact

A mesure qu'on augmente la vitesse du projectile, les brisures secondaires interviennent de plus en plus proche du point d'impact, si bien que lorsque la vitesse d'impact est suffisamment grande (ici de l'ordre de $V = 100 \text{ m.s}^{-1}$) le trou laissé par l'impacteur est de l'ordre du diamètre de ce dernier. On observe de multiples générations de fissures secondaires, intervenant si tôt qu'aucune fissure radiale ne se propage au delà du trou formé. La figure 3.16 illustre ce régime de fragmentation qui se caractérise par l'obtention d'un grand nombre de petits fragments. Ainsi, assez paradoxalement, c'est aux vitesses d'impact les plus élevées que la plaque subit le moins de dégâts, ceux-ci se limitant au voisinage du point d'impact.

5 Impacts sur des plaques de verre

L'étude phénoménologique précédente sur la fragmentation du PMMA sous impact a révélé la nette influence de la vitesse d'impact du projectile sur le nombre et la taille des fragments. Dans le but de vérifier que les régimes de fragmentation observés dans le cas du PMMA se retrouvent dans d'autres types de matériaux fragiles, nous avons conduit des expériences sur des plaques de verre. D'autres études expérimentales sont consacrées aux impacts sur des plaques de verre (N. Shinkai dans [17] et [18]). Par ailleurs, S. Bouzid & *al* proposent un critère pour caractériser les différents régimes de fracture du verre sous impact en se focalisant sur l'activation des défauts dans le volume au voisinage du point d'impact [27]. Leur étude s'intéresse au *spalling*, c'est à dire la fragmentation en volume observée au voisinage immédiat du point d'impact, qui, dans le cas du verre, influence grandement la pénétration du projectile. Ainsi, ils ne proposent pas de modèle décrivant le réseau de fissures radiales. Dans nos expériences, le type de verre utilisé ici est un verre de vitrage courant, d'épaisseur 2 mm dont l'estimation des propriétés mécaniques est reportée dans le tableau 3.1. Une revue historique de la caractérisation des propriétés mécaniques des verres est réalisée dans l'article de J. Zarzycki [28]. La différence la plus importante entre les deux matériaux réside dans la plus grande fragilité du verre. En effet, si on compare la contrainte de rupture du verre à son module d'Young, on obtient un rapport $\sigma_c/E \sim 6 \times 10^{-4}$ tandis que le PMMA présente un rapport $\sigma_c/E \sim 2 \times 10^{-2}$ largement plus important. Ceci indique que le verre cède sous des déformations environ 30 fois plus faibles que la déformation critique du PMMA. On s'attend donc à obtenir un plus grand nombre de fragments avec le verre.

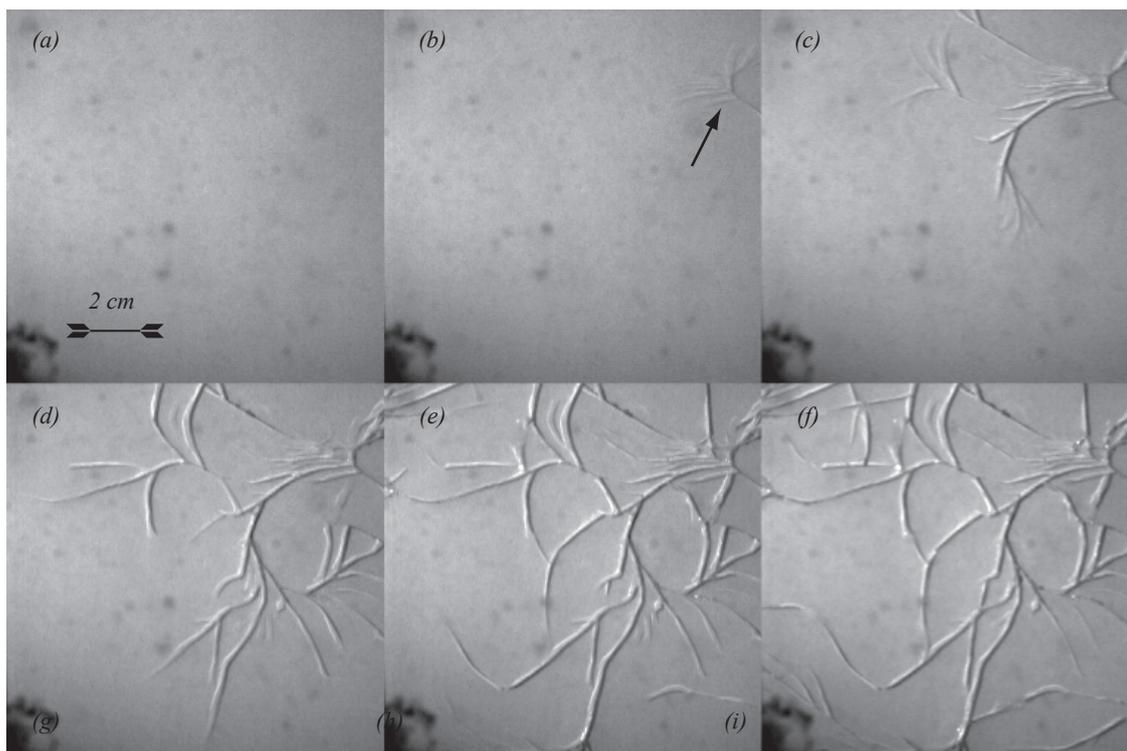


FIG. 3.17 – Premiers instants consécutifs à l’impact d’une plaque de verre d’épaisseur 2 mm par une bille d’acier de 9 mm de diamètre lancée à la vitesse $V = 16 \text{ m.s}^{-1}$. Pour une meilleure visualisation des fissures, la face de la plaque subissant l’impact est peinte en blanc. Chaque image est séparée d’une durée de $33 \mu\text{s}$. (a) La plaque est au repos. (b) Première image obtenue après l’impact : des fissures apparaissent au voisinage du point d’impact sans symétrie radiale apparente. La flèche repère le point d’impact. (c) à (f) De multiples fissures apparaissent et se branchent dans toute la plaque.

5.1 Fragmentation sans structures radiales

Aux faibles vitesses d’impact, typiquement $V \leq 20 \text{ m.s}^{-1}$, la plaque de verre se brise de manière désordonnée. Si la zone au voisinage du point d’impact rompt en premier, le mode de brisure ne présente aucune structure symétrique et semble davantage suivre les défauts du matériaux. Un grand nombre de fissures apparaissent et se branchent dans toute la plaque, si bien qu’il est difficile de repérer le point d’impact en se fiant seulement au motif de brisure final. Ainsi, à des vitesses d’impact pour lesquelles le PMMA ne subissait aucun endommagement, le verre présente un motif de brisure désordonné. La figure 3.17 montre un exemple de plaque de verre percutée par une bille lancée à $V = 16 \text{ m.s}^{-1}$.

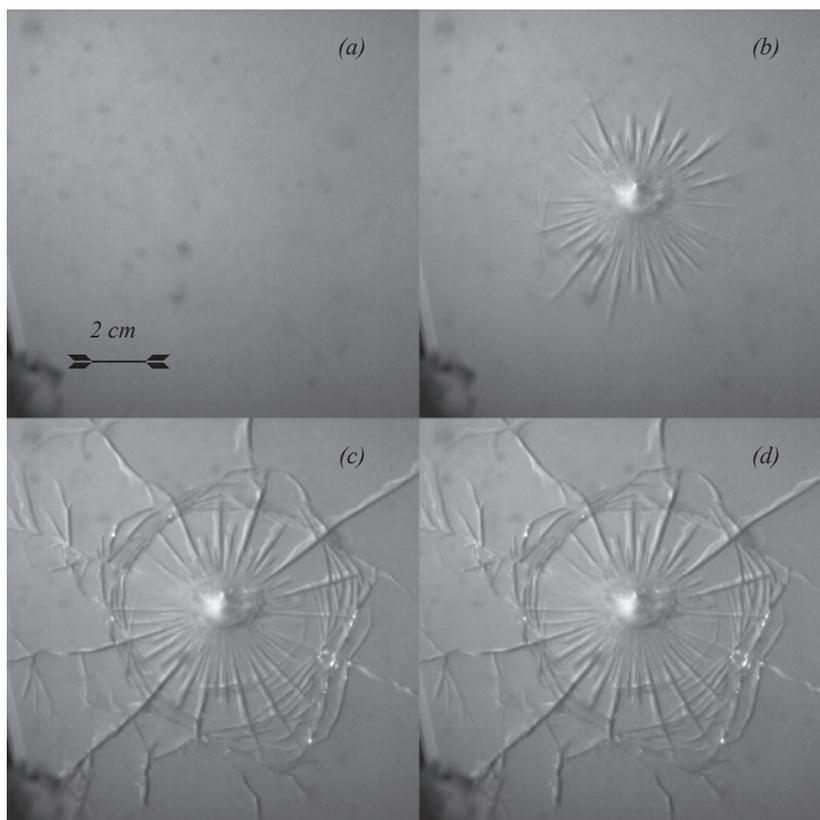


FIG. 3.18 – Premiers instants consécutifs à l’impact d’une plaque de verre d’épaisseur 2 mm par une bille d’acier de 9 mm de diamètre lancée à la vitesse $V = 26 \text{ m.s}^{-1}$. Pour une meilleure visualisation des fissures, la face de la plaque subissant l’impact est peinte en blanc. Chaque image est séparée d’une durée de $33 \mu\text{s}$. (a) La plaque est au repos. (b) Première image obtenue après l’impact. (c) et (d) On observe une large zone d’endommagement circulaire autour du point d’impact dont très peu de fissures radiales émergent. Un mode de brisure azimuthal secondaire apparaît, centré autour du point d’impact, au delà duquel les fissures radiales initiales ne se propagent pas. Des fissures secondaires apparaissent loin du point d’impact : soit indépendamment des fissures azimuthales, soit par branchement de ces dernières.

5.2 Fragmentation avec fissures radiales

Pour des vitesses d’impact plus grandes, de l’ordre de $V \geq 20 \text{ m.s}^{-1}$, on observe un régime de fragmentation avec des fissures radiales au voisinage du point d’impact. Ainsi, la figure 3.18 montre les premiers instants consécutifs à l’impact d’une plaque de verre par une bille lancée à $V = 26 \text{ m.s}^{-1}$. La phénoménologie observée est comparable à celle décrite dans le cas du PMMA. En effet, on remarque la naissance d’une grande quantité de fissures radiales émergeant d’une zone de fort endommagement située au voisinage immédiat du point d’impact. La zone de fort endommagement s’étend sur une longueur comparable au diamètre de la bille. Le nombre de fissures initiales, grand comparé à celui mesuré avec le PMMA, s’explique par la plus grande fragilité du verre. De plus, comme dans le cas du PMMA, le nombre de fissures radiales diminue nettement à mesure qu’on s’éloigne du point d’impact. De même,

on observe la génération de fissures secondaires dans la direction azimutale.

La figure 3.19 illustre la même expérience de manière plus globale. Il est très intéressant de remarquer que le nombre final de fissures radiales, bien visible à partir de la vignette (*g*), est largement inférieur au nombre initial et qu'il est, en outre, de l'ordre du nombre de fissures radiales observé dans le cas du PMMA (ici $n = 9$). Ceci suggère que le motif de brisure en fissures radiales est davantage gouverné par la réponse élastique de la plaque que par la distribution des défauts dans le matériau. D'ailleurs, même si la plus grande fragilité du verre aboutit à un grand nombre de fragments, on observe que le régime de fragmentation en fissures radiales, de manière globale, guide le motif de brisure : fissures radiales et génération secondaire de fissures azimutales.

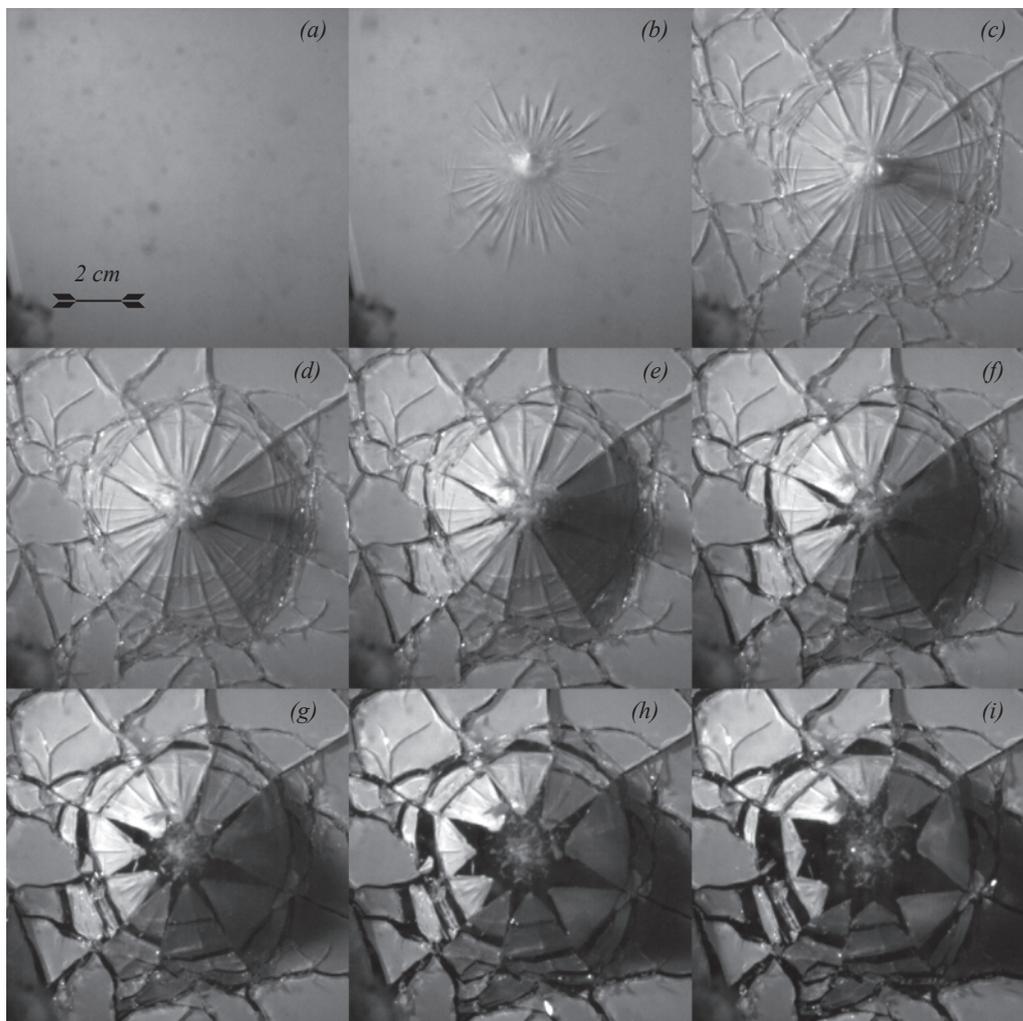


FIG. 3.19 – Impact d’une bille d’acier de 9 mm de diamètre sur une plaque de verre de 2 mm d’épaisseur. La vitesse d’impact est $V = 26 \text{ m.s}^{-1}$. L’intervalle de temps entre chaque image est de 0.66 ms. (a) à (b) On observe l’apparition et la propagation de nombreuses fissures radiales à partir du point d’impact. (c) On observe une brisure centrée sur le point d’impact dans la direction azimuthale, au delà de laquelle certaines fissures radiales initiales se propagent. De nombreuses brisures secondaires apparaissent loin du point d’impact. (d) à (i) Seules certaines fissures radiales gagnent toute l’épaisseur de la plaque, ce qui aboutit à un nombre de neuf pétales. Ce nombre est sensiblement inférieur au nombre initial de fissures radiales. Par ailleurs, de nombreuses fissures secondaires résultent en un grand nombre de fragments.

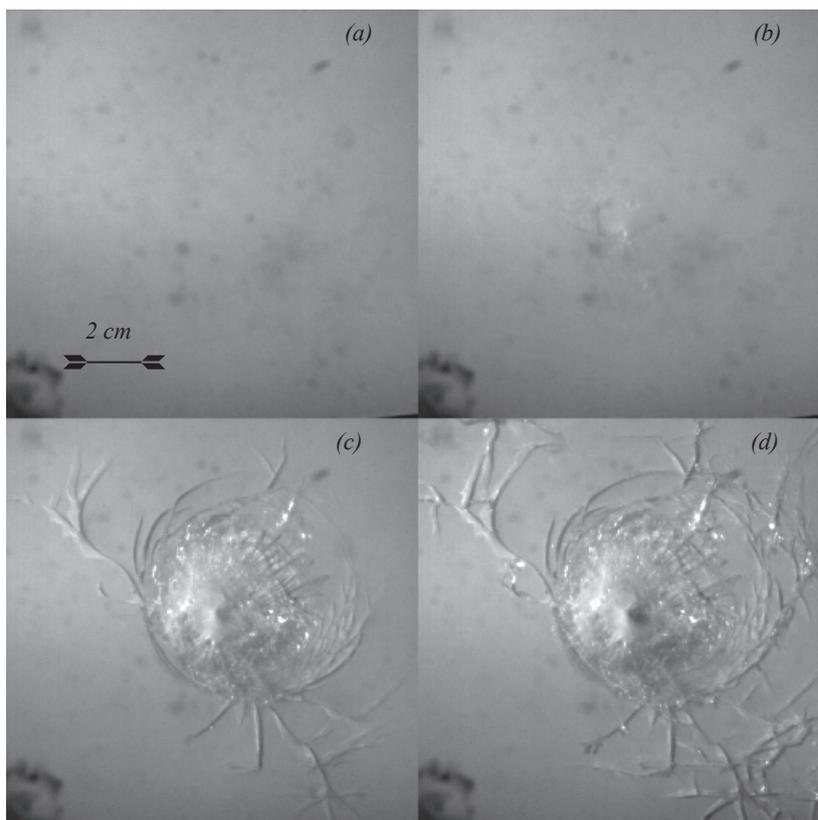


FIG. 3.20 – Premiers instants consécutifs à l’impact d’une plaque de verre d’épaisseur 2 mm par une bille d’acier de 9 mm de diamètre lancée à la vitesse $V = 47 \text{ m.s}^{-1}$. Pour une meilleure visualisation des fissures, la face de la plaque subissant l’impact est peinte en blanc. Chaque image est séparée d’une durée de $33 \mu\text{s}$. (a) La plaque est au repos. (b) Première image obtenue après l’impact. (c) et (d) On observe une large zone d’endommagement circulaire autour du point d’impact dont très peu de fissures radiales émergent. Un mode de brisure azimuthal secondaire apparaît, centré autour du point d’impact, au delà duquel les fissures radiales initiales ne se propagent pas. Des fissures secondaires apparaissent loin du point d’impact : soit indépendamment des fissures azimuthales, soit par branchement de ces dernières.

Fragmentation à haute vitesse d’impact

Dans le cas des plus hautes vitesses d’impact (typiquement $V > 45 \text{ m.s}^{-1}$) le motif de rupture d’une plaque de verre ne laisse plus apparaître de structures radiales. La figure 3.20 illustre les premiers instants suivant l’impact d’une plaque de verre par une bille d’acier lancée à $V = 47 \text{ m.s}^{-1}$. La zone de fort endommagement, autour du point d’impact, s’étend sur une distance grande comme plusieurs diamètres de la bille. Peu de fissures radiales émergent de cette zone et on remarque qu’elles ne se propagent pas au delà des brisures azimuthales secondaires.

La figure 3.21 montre la même expérience sur une durée plus grande. On observe que la zone de fort endommagement est littéralement pulvérisée au passage de la bille, résultant en une multitude de fragments dont la taille est petite devant l’épaisseur de la plaque. Derrière elle, la bille laisse un trou dont le diamètre est plusieurs fois

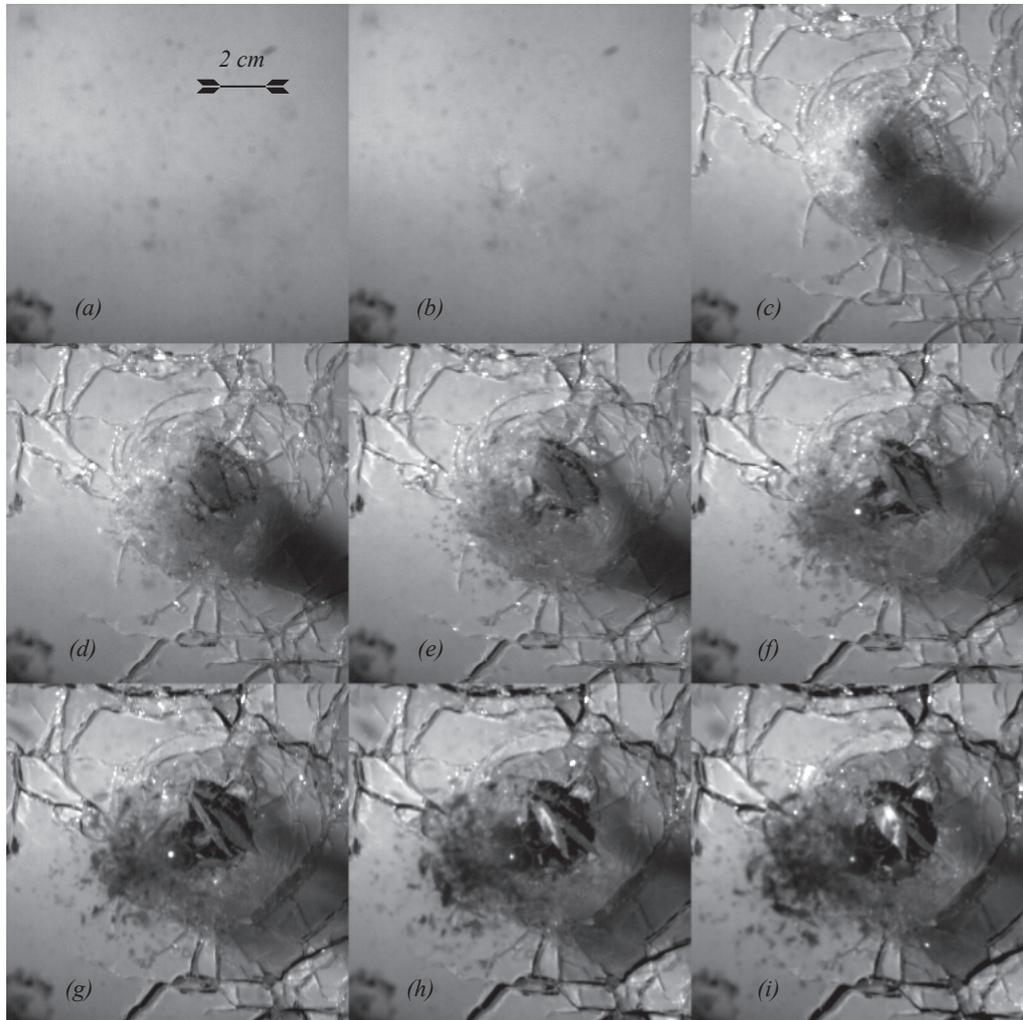


FIG. 3.21 – Impact d’une bille d’acier de 9 mm de diamètre sur une plaque de verre de 2 mm d’épaisseur. La vitesse d’impact est $V = 47 \text{ m.s}^{-1}$. L’intervalle de temps entre chaque image est de 0.66 ms. Après l’impact, on observe un large zone d’endommagement autour du point d’impact dont est éjectée une multitude de fragments de dimensions petites devant l’épaisseur de la plaque. Peu de fissures radiales émergent de cette zone et de nombreuses brisures secondaires apparaissent loin du point d’impact. La bille traverse la plaque laissant derrière elle un trou de dimension plusieurs fois égale à son diamètre.

égal à son diamètre. Cette phénoménologie est analogue à celle observée avec les plaques de PMMA soumises à de hautes vitesses d'impact. La principale différence réside dans le grand nombre et la petite taille des fragments dus à la fragilité accrue du verre. Pour la même raison, de nombreuses fissures secondaires se forment loin du point d'impact.

6 Conclusion

L'étude expérimentale présentée a permis de documenter en détails la phénoménologie associée à la fragmentation d'une plaque fragile soumise à un impact transverse. Les expériences ont mis en évidence l'existence de plusieurs régimes de fragmentation en fonction de la vitesse d'impact du projectile :

- Lorsque la vitesse d'impact est inférieure à la vitesse seuil V_s , la plaque ne se brise pas, seule une zone d'endommagement Hertzien est notée au niveau du point d'impact.
- Au delà de la vitesse seuil, on observe une brisure présentant des fissures radiales dont le nombre est sélectionné par la vitesse d'impact. Ces fissures naissent sur la face opposée de la plaque. Plus la vitesse d'impact est élevée, plus on observe de fissures. Le nombre des fissures dépend également de la distance au point d'impact : à mesure que l'on s'éloigne du point d'impact on dénombre moins de fissures et leur répartition semble plus uniforme. Finalement, loin du point d'impact, le nombre n de fissures pénétrant dans toute l'épaisseur de la plaque varie entre $n = 2$ et $n = 9$. Par ailleurs, la masse et la forme du projectile n'influent pas sur la sélection.
- Lorsqu'on augmente la vitesse d'impact, on passe de manière continue à un régime où des brisures azimutales secondaires accompagnent les fissures radiales.
- Pour les hautes vitesses d'impact, les brisures azimutales secondaires se développent de plus en plus près du point d'impact, si bien que le projectile traverse la plaque en laissant un trou derrière lui.

Dans la mesure où le nombre de fissures fait l'objet d'une sélection en fonction de la vitesse d'impact, le motif de brisure en fissures radiales attire plus particulièrement notre attention. Si la compréhension théorique de ce phénomène de sélection demeure pour le moment hors de portée, nous avons montré que des arguments simples, inspirés de la théorie classique des plaques, s'avèrent cohérents avec l'expérience. Ainsi, la déformation résultant de l'impact présente une forme conique dont la base se propage vers les bords de la plaque comme la racine carrée du temps en bon accord avec nos mesures. Le profil de déformation prédit pour un impact ponctuel est en accord avec la formation de fissures dans la direction radiale. Enfin, l'étude de la décélération du projectile au contact de la plaque permet d'estimer une valeur seuil de la vitesse d'impact pour que la brisure aie lieu.

Ainsi, la brisure d'une plaque fragile sous impact est un parfait exemple de phénomène de fragmentation pour lequel la distribution de taille de fragments est largement influencée par la réponse élastique du milieu. Les expériences menées sur le PMMA et le verre montrent le caractère universel du phénomène de rupture en fissures radiales. Par conséquent, la régularité et l'auto-organisation des motifs de brisure observés, ainsi que la sélection du nombre de fissures par la vitesse d'impact suggèrent un mécanisme de fragmentation qui ne peut se limiter à la simple activation des défauts du matériau. Toutefois, l'étude théorique directe du phénomène s'annonce complexe, de même que l'aspect statistique du problème ajoute à sa difficulté. Dès lors, nous avons fait le choix d'étudier d'autres phénomènes présentant des analogies avec les impacts sur les plaques. C'est donc dans cette démarche que s'inscrivent les travaux relatifs aux impacts sur des membranes élastiques (voir chapitre 4), de même que l'étude sur la perforation et la fragmentation en pétales des films fragiles (voir chapitre 5). Ce travail s'impose donc comme un inventaire des phénomènes liés à la fragmentation d'une plaque fragile auquel toute étude théorique devra être confrontée.

Chapitre 4

Impacts sur des membranes élastiques

1 Introduction

Dans cette partie, nous présentons une étude concernant les impacts sur des membranes élastiques. Ces travaux ont fait l'objet d'une publication ([29]) jointe dans ce chapitre.

Lorsqu'un projectile rigide entre en collision avec une membrane élastique aux bords libres, cette dernière se fléchit localement. Alors que l'impacteur tire la feuille élastique hors de son plan, un front d'onde de tension se propage depuis le point d'impact vers le bord de la cible, et ce, à la vitesse du son dans le matériau. Dans la région sous tension, l'interaction entre le projectile et la membrane donne naissance à une déformation transverse conique, dont la base progresse vers le bord avec une vitesse inférieure à celle du son. Dans la zone de la membrane comprise entre ces fronts de flexion et de tension, on observe un confinement géométrique qui résulte en une contrainte de compression azimutale. Ainsi, la région annulaire de la feuille élastique comprise entre les deux fronts présente une instabilité de flambage dynamique qui aboutit à la formation de plis. Ces plis sont distribués sur la circonférence de la feuille et se développent dans la direction radiale.

Les instabilités de flambage des membranes élastiques ont motivé plusieurs travaux récents. Ainsi, des études ont montré que des membranes élastiques circulaires, subissant des contraintes géométriques à leurs bords, développent localement une instabilité de flambage azimutal comme dans les expériences de J.-C. Géminard & *al* [30], J. Huang & *al* [31] et J. Chopin & *al* [32]. Toutefois, ces travaux s'appliquent à des cas statiques. S.L. Phoenix & P.K. Porwal [33] ont, quant à eux, proposé un modèle pour la propagation des ondes consécutives à un impact sur une membrane axi-symétrique aux bords libres. Cependant, ils ont négligé le champ de contrainte azimutal qui provoque le flambage dynamique. L'étude présentée ici vise à décrire les étapes successives qui mènent à l'instabilité de flambage d'une membrane élastique subissant un impact transverse. Nous décrivons le champ de contrainte résultant de l'impact et proposons un modèle théorique qui prédit la longueur d'onde instable de plissement.

Le choix de travailler avec des membranes en latex comme système expérimental s'inscrit dans la même démarche qui nous a conduit à étudier le flambage dynamique d'un élastique. Le principe consiste à étudier l'impact d'un projectile sur une plaque, mais dans une limite purement élastique. En effet, l'analogie visuelle entre les plissements d'une membrane et les fissures radiales d'une plaque fragile, observée dans des expériences préliminaires, nous engagea à poursuivre dans cette voie. Toutefois, nous verrons que certains aspects phénoménologiques divergent entre les deux problèmes, nous conduisant à penser que les deux phénomènes ne sont pas liés. Ces points précis seront discutés en conclusion de ce chapitre.

Impacts on thin elastic sheets

BY ROMAIN VERMOREL, NICOLAS VANDENBERGHE*
AND EMMANUEL VILLERMAUX

*IRPHE, CNRS-Aix Marseille Université, 49, rue Frédéric Joliot-Curie,
13384 Marseille Cedex 13, France*

We study transverse impacts of rigid objects on a free elastic membrane, using thin circular sheets of natural rubber as experimental models. After impact, two distinct axisymmetric waves propagate in and on the sheet. First, a tensile wave travels at sound speed leaving behind the wavefront a stretched domain and then a transverse wave propagates on the stretched area at a lower speed. In the stretched area, geometrical confinement induces compressive circumferential stresses leading to a buckling instability, giving rise to radial wrinkles. We report on a set of experiments and theoretical remarks on the conditions of occurrence of these wrinkles, their dynamics and wavelength.

Keywords: membrane; impact; buckling; wrinkling

1. Introduction

When a thin elastic sheet is impacted transversely by a rigid body, it deforms locally out of its plane. Depending on the nature of the material and the strength of the impact, the sheet may be perforated, it may deform permanently or it may present radial or circumferential cracks (Backman & Goldsmith 1978). An understanding of these phenomena requires knowledge of the global response of a sheet to localized impacts.

Sheets with small thickness have a weak intrinsic bending rigidity. Very thin sheets such as clothes or biological membranes can thus freely bend and they often exhibit wrinkles (Cerda *et al.* 2004). If the sheet is stretched, this is no longer the case since any transverse motion is accompanied by a restoring force proportional to the tension. On the other hand, if the sheet is compressed, a buckling instability develops and the membrane wrinkles.

We consider the problem of a free-standing axisymmetric membrane impacted transversely at its centre. A static version of this problem, namely a membrane clamped at its boundaries deformed by a punctual force, has been considered by Begley & Mackin (2004). In this static configuration, the membrane remains axisymmetric for any force, with no wrinkling. When a free-standing membrane (i.e. a membrane with no initial stress) is impacted, tensile stresses develop as a

*Author for correspondence (nvdb@irphe.univ-mrs.fr).

Electronic supplementary material is available at <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2008.0297> or via <http://journals.royalsociety.org>.

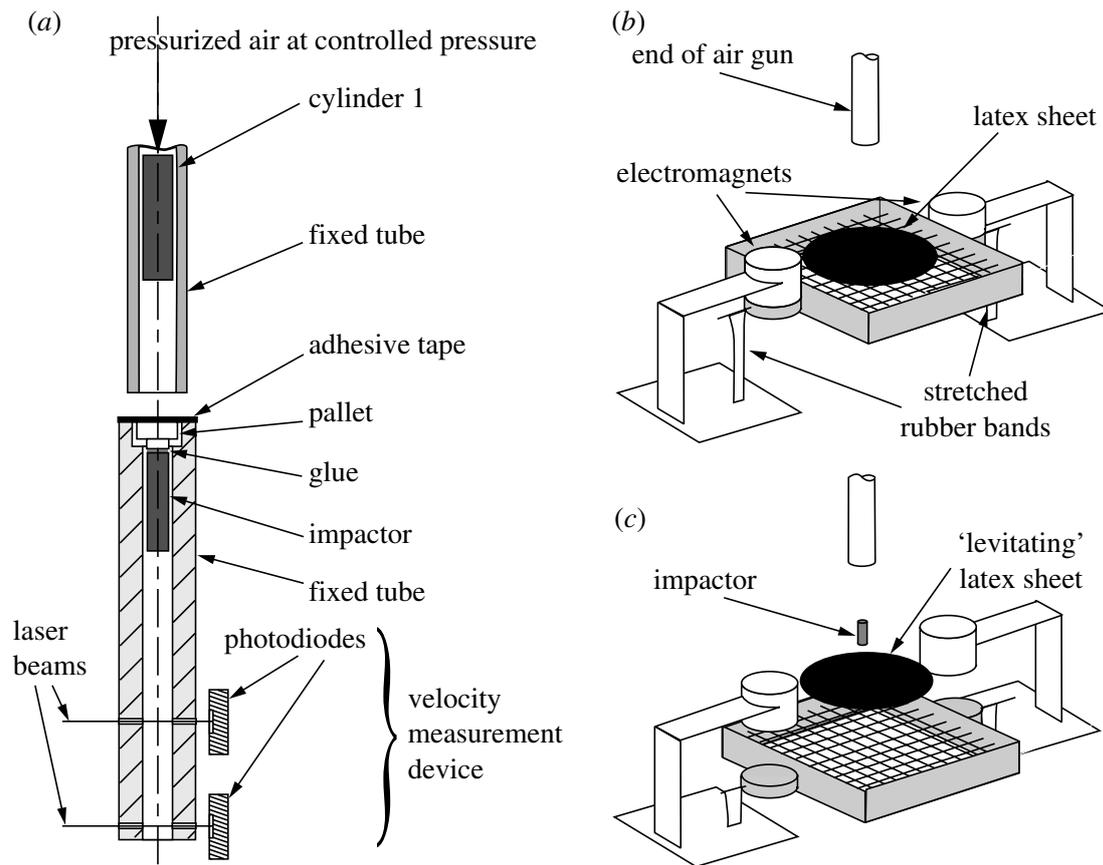


Figure 1. Experimental set-up: (a) a two-stage gas gun is used to launch impactors. When the cylinder 1 hits the pallet, the adhesive tape is torn off, the pallet is accelerated and the slightly glued impactor is released; (b) the impacted sheet stands on a netting stretched on a frame, and (c) when the gas gun is triggered, the electromagnets are switched off and the frame is pulled by two rubber bands. The impactor hits a free sheet.

result of the impact. This problem is more complicated than the classical drum problem (Graff 1975), in which the variation of in-plane stresses due to the impact itself are neglected. Phoenix & Porwal (2003) have reviewed previous results on the impacts on free-standing membranes in the context of fibrous system (e.g. textile, etc.). They also developed a model for the ballistic response of an axisymmetric free-standing membrane neglecting compressive circumferential stresses. However, as seen in figures 2 and 3, when a free-standing membrane is impacted, it buckles and radial wrinkles appear. The aim of this present work is to describe the sequence of events inducing this instability. We first describe the axisymmetric stress field resulting from the impact and we show that a region of the membrane experiences circumferential compression. We then study the development of the buckling instability leading to the formation of radial wrinkles, and we propose a model predicting their wavelength.

2. Experimental set-up

We use a vertical gas gun to launch steel cylinders and spheres of radius $r_i = 2.25$ mm (figure 1). Unless otherwise noted, steel cylinders of length 27 mm and mass 3.3×10^{-3} kg are used for the measurements. A cylinder is accelerated

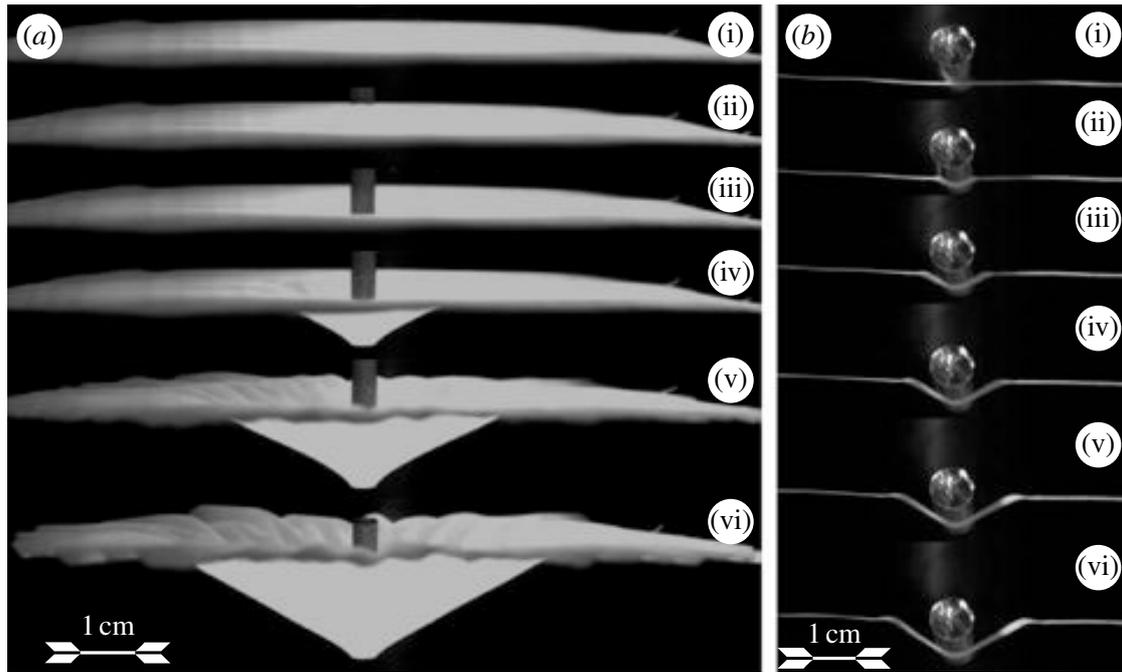


Figure 2. (a) Impact of a steel cylinder on a thin rubber sheet of radius $r_0=60$ mm and thickness $h=0.10$ mm. The time step between two frames is 1.33 ms. ((i)–(iii)) The cylinder of radius $r_i=2.25$ mm impacts the free levitating sheet at velocity $V=5.8$ m s $^{-1}$. (iv) After impact a cone expands. ((v)–(vi)) The propagation of both tensile and transverse waves yield an in-plane stress field that will eventually induce a buckling instability. A movie showing the dynamics is included in the electronic supplementary materials. (b) Impact of a free-falling rod on a thin rubber strip of thickness 0.10 mm, length 100 mm and width 4 mm. The time step between two frames is 0.50 ms. (i) The rod impacts the free levitating strip with velocity $V=3.7$ m s $^{-1}$. ((ii)–(vi)) After impact a V-shaped area expands.

by pressurized air inside a 40-cm-long tube. Beneath this tube stands a pallet to which we lightly glue the impactor (cylinder or sphere). As the cylinder hits the pallet the impactor is released. The impactor is guided in a second tube of length 10 cm. At the end of this tube two laser beams are used to measure the speed of the impactor. This two-stage design ensures that the latex sheet is not perturbed by the gas ejected from the gun. The speed of the impactor can be adjusted with a pressure regulator.

The latex sheet stands horizontally on a net stretched on an open frame. The open frame is maintained approximately 10 cm below the end of the second tube by two electromagnets that are synchronized with the gas gun. When the electromagnets are switched off, two rubber bands violently pull the frame down and free the latex sheet. The latex sheet falls down under the action of gravity but the characteristic time scale of its fall is much longer than any other time scale in the problem. Thus, the impactor hits a perfectly free ‘levitating’ latex sheet. As discussed in §6c, the boundary conditions at the outer radius of the membrane do not play a crucial role in the study, and the main purpose of our set-up is to ensure that the latex sheet is stress-free when it is hit by the impactor.

The sheets are cut from natural latex rubber sheets of different thicknesses from 0.10 mm up to 0.30 mm. The radius of the sheets is typically $r_0=60$ mm. Static stretching tests reveal that in the range of stretching between 0 and 100 per cent, the elastic behaviour of the rubber remains linear (within 3%) with

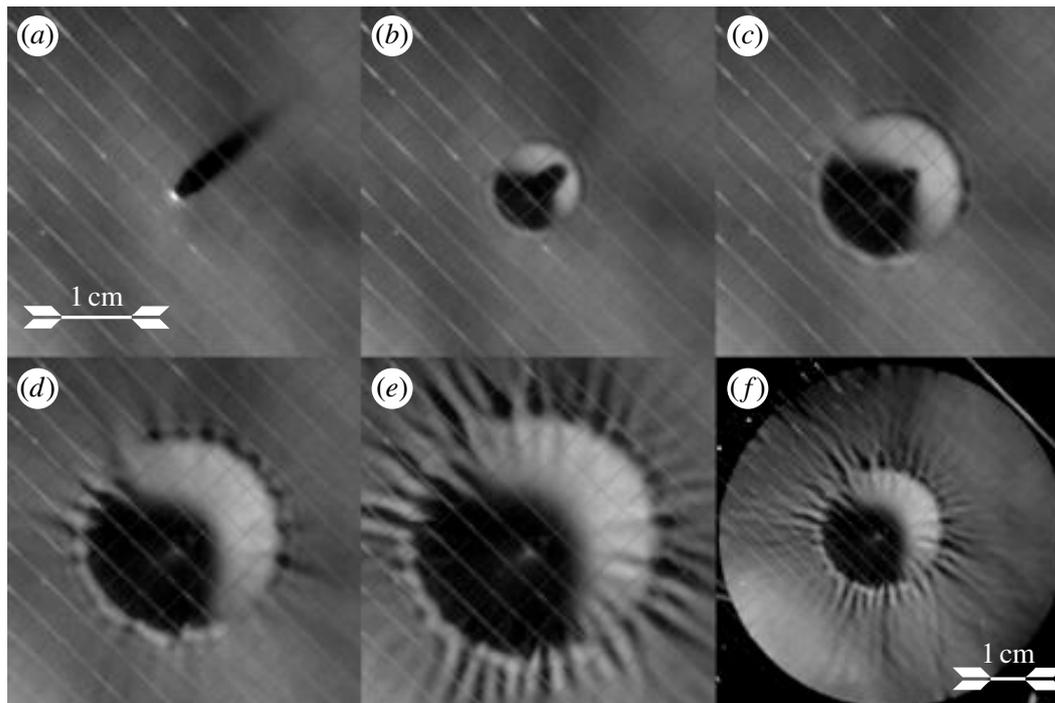


Figure 3. Bottom view of the impact of a steel ball of radius 2.25 mm on a thin rubber sheet of radius 55 mm and thickness 0.10 mm. The time step between two frames is 0.50 ms. ((a)–(c)) As the ball impacts the sheet at speed $V=5.2\text{ m s}^{-1}$, the transverse wavefront propagates radially, ((c)–(e)) material points are pulled towards the centre of the sheet and a circumferential compressive stress triggers a buckling instability selecting a well-defined wavelength, (f) zoomed out view of (e). A movie showing the dynamics is included in the electronic supplementary material.

a Young's modulus $E=1.5\text{ MPa}$ and no significant hysteretic behaviour, i.e. stress softening of the rubber (Bouasse & Carrière 1903; Mullins 1947), is observed. In all our experiments the strain does not exceed 60 per cent. The density of the rubber is $\rho=990\text{ kg m}^{-3}$. The Poisson modulus is $\nu=0.5$ and thus the nominal wave speed for in plane disturbances is $c=\sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}=45\text{ m s}^{-1}$.

Our diagnostics are based on quantitative image analysis, resolved in time. The typical time scale is $r_0/c\approx 1.3\text{ ms}$. We use a Photron high-speed video camera to record movies at typical frame rates of 7000 up to 90 000 frames s^{-1} . For side views, we use direct lighting with a black background. For movies showing a view from bottom a mirror is placed underneath the supporting device and the sheet is illuminated from above. When needed, regularly spaced marks are drawn on the sheet to follow the motion of the material points.

As a complement to document the impact phenomenology, we also conduct experiments using narrow latex strips instead of the circular latex sheets. The thickness of the strips is 0.10 mm, their length is 100 mm and their width is 4 mm.

3. Phenomenology

When a rigid body impacts the centre of the thin elastic disc at velocity V (figure 2a), a tensile front sets out from the impact point and propagates radially towards the edge of the sheet at speed of sound c . In the stretched area, material points move towards the centre of the sheet. As the impactor pulls the

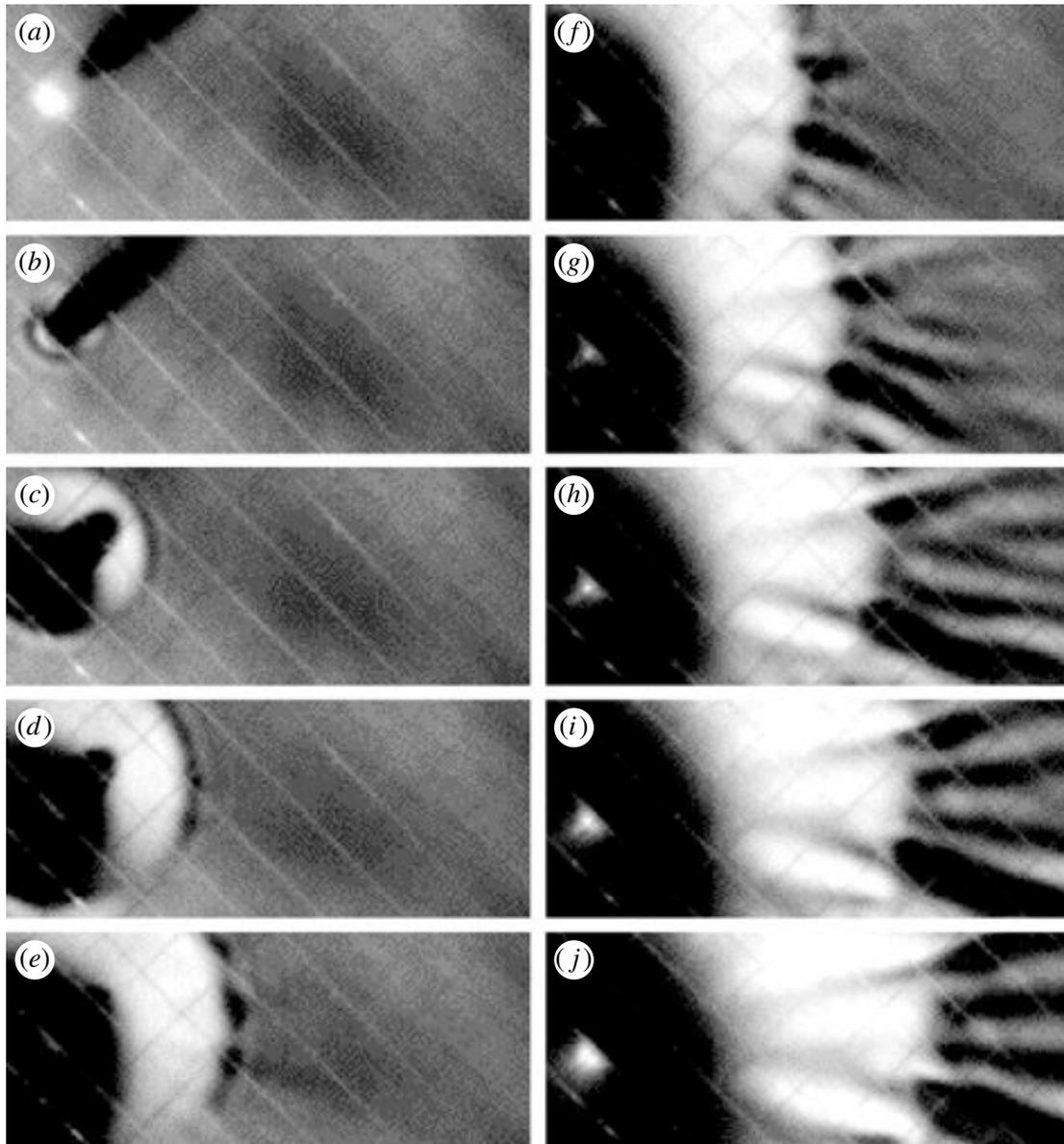


Figure 4. ((a)–(j)) Close bottom view of the transverse wavefront after impact of a steel ball at $V=5.2 \text{ m s}^{-1}$ on a thin rubber sheet. Time goes by steps of 0.70 ms. Wrinkles appear at different stages so that the wavelength of the wrinkling pattern is constant.

membrane, with no observed sliding of the rubber against the impactor, a cone expands towards the edge of the sheet at velocity \bar{U} (with $\bar{U} < c$) in the laboratory frame. In the stretched area, tensile stress in the radial direction is accompanied by contraction in the direction normal to it. Thus compressive circumferential stresses develop in the stretched area and the sheet buckles, giving rise to wrinkles (figure 3).

Experiments show that the buckling instability selects a wavelength rather than a number of folds. Indeed, as the transverse wavefront propagates the perimeter and width of the compressed area increase with time and so does the number of folds and thus the buckling wavelength does not change. As can be seen in figure 4, new folds are generated during the propagation of the transverse wavefront, so that the wavelength does not change with time.

We also study the one-dimensional version of the problem, the impact on a thin elastic strip (figure 2b). The phenomenology is similar except, de facto, for the formation of wrinkles: first a tensile front propagates away from the impact point and then, as the impacting body drags the strip out of its plane, a transverse ‘V-shape’ expands in the stretched material.

4. Wave propagation after impact

(a) Wavefronts resulting from an impact on a one-dimensional elastic string

An elastic string has a density ρ and Young’s modulus E . The string length l is such that $l \gg ct$, in which $c = \sqrt{E/\rho}$ is the nominal wave speed for longitudinal disturbances (Love 1944) and t the typical time of observation after impact. The free string is impacted transversely at the point $x=0$. The mass of the impacting body is very large compared to the mass of the string, and the impacting velocity V is such that $V/c \ll 1$. In that limit, the projectile is not decelerated.

When the string is impacted, a longitudinal wave propagates at speed c . Behind the wavefront, the stretching ϵ (to be determined) is taken as constant and uniform. Material points are thus moving towards the impact point at speed $W = -c\epsilon$. In the stretched area, a transverse wave travels and a ‘V-shaped’ area expands (figure 2b). The base of this area travels at the speed of propagation of transverse disturbances. We assume that the stretching is ϵ also in the V-shaped area. In the frame of material points, the equation for the transverse displacement $\xi(x, t)$ is

$$\rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial(T \sin \phi)}{\partial x}, \quad (4.1)$$

where A is the cross section area and $T = EA\epsilon$ is the tension in the string. $\phi(x, t)$ is the angle between the local tangent and the x -axis and $(1 + \epsilon)\sin \phi = \partial \xi / \partial x$. Thus the speed of transverse disturbances in the frame of material points is

$$U = c \sqrt{\frac{\epsilon}{1 + \epsilon}}. \quad (4.2)$$

At time t , the transverse wavefront reaches the material point $x_F = Ut$. This point has travelled a distance $W[t - t_l(x_F)]$ where $t_l(x_F) = x_F/c$ and thus its position in the laboratory frame is

$$\bar{x}_F = x_F - c\epsilon[t - t_l(x_F)] = x_F(1 + \epsilon) - c\epsilon t. \quad (4.3)$$

To relate the impactor speed with other quantities, we use Pythagoras’ theorem

$$\bar{x}_F^2 + (Vt)^2 = (1 + \epsilon)^2 x_F^2. \quad (4.4)$$

Substituting \bar{x}_F , x_F and U , we obtain an equation for ϵ

$$\left[\sqrt{\epsilon(1 + \epsilon) - \epsilon} \right]^2 (ct)^2 + (Vt)^2 = \epsilon(1 + \epsilon)(ct)^2. \quad (4.5)$$

Interestingly, the leading contribution to the motion of the transverse wavefront is the motion of the material points towards the impact point at speed $-c\epsilon$. We obtain ϵ and the speed of the transverse wavefront in the laboratory frame $\bar{U} = \bar{x}_F/t$

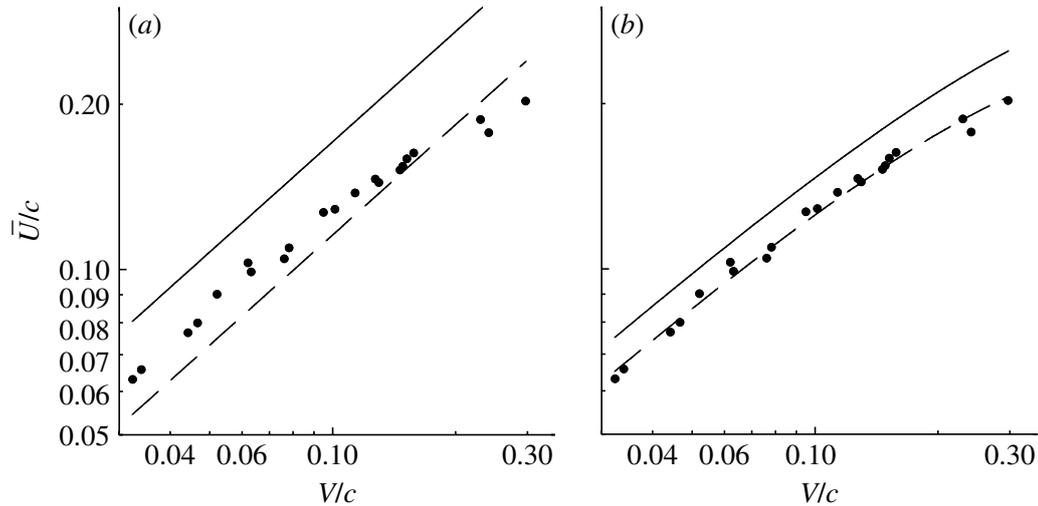


Figure 5. Transverse wavefront velocity in the laboratory frame versus impacting velocity, measured for a thin strip. The solid lines stand for the theoretical predictions with no adjustable parameter while the dotted lines stand for the fit with an adjusted prefactor. (a) First order in ϵ prediction, and (b) second order in ϵ prediction.

$$\epsilon = \left(\frac{V}{\sqrt{2}c}\right)^{4/3} + \left(\frac{V}{\sqrt{6}c}\right)^2 + \mathcal{O}((V/c)^2), \quad (4.6)$$

$$\frac{\bar{U}}{c} = \left(\frac{V}{\sqrt{2}c}\right)^{2/3} - \frac{5}{6} \left(\frac{V}{\sqrt{2}c}\right)^{4/3} + \mathcal{O}((V/c)^2). \quad (4.7)$$

Figure 5 shows the measured dependence of the transverse wavefront velocity on the impacting velocity. Equation (4.7) agrees well with the measurements, but the theory overestimates the transverse-front velocity. This may come from the two-dimensional geometry of the latex rubber strips while we used a one-dimensional model for strings. Indeed, a careful examination of the images shows that the base of the cone connects smoothly rather than angularly with the straight section. This connection occurs over a length of a few millimetres (the width of the strip is 4 mm). Nevertheless, results clearly show that the mechanism we propose for the wavefront propagation after impact is the good scenario.

(b) *Waves resulting from an impact on a two-dimensional elastic membrane*

The problem of the impact on a circular membrane is more complicated because the circular waveforms do not maintain their shape as they propagate. The propagation mechanism is, however, the same as for the strings. As seen in figure 6, a tensile front propagates at the speed of sound in the material. Then a cone grows in a stretched area and thus it must obey the equation of propagation for transverse perturbations. Our objective here is to provide an approximate form for the stress field in the area of the tensile wave. This stress field will later be used to study the development of the wrinkling instability.

A circular elastic membrane has density ρ , Young's modulus E and Poisson ratio ν . The radius of the membrane is such that $r_0 \gg ct$, in which c given by $c^2 = E/[(1-\nu^2)\rho]$ is the nominal wave-speed for in plane disturbances and t is the

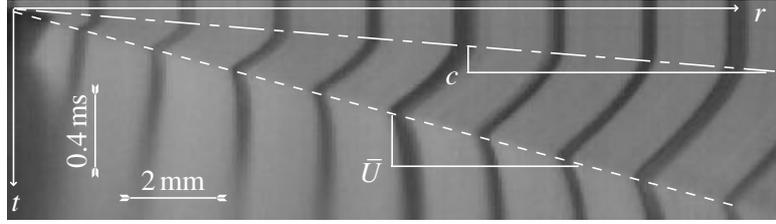


Figure 6. Space–time reconstruction of the motion of the material points on an impacted membrane taken from a high-speed movie. The longitudinal wavefront propagates at the speed of sound c . The transverse wavefront propagates at a constant speed \bar{U} with $\bar{U} < c$.

typical time of observation after impact. The initially stress and strain-free membrane is transversely impacted at the point $r=0$. We consider that the mass of the impactor is much larger than the mass of the membrane, a limit for which the projectile deceleration can be neglected. The impacting velocity V is such that $V/c \ll 1$.

The radial displacement $\zeta(r, t)$ is given by the wave equation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) - \frac{\zeta}{r^2}. \quad (4.8)$$

This equation has no simple solution and we use a quasistatic approximation

$$\zeta(r, t) = \alpha(r_i + ct) \left(\frac{r}{r_i + ct} - \frac{r_i + ct}{r} \right), \quad (4.9)$$

where α is a dimensionless constant to be determined. The form for the displacement corresponds to the solution of the static problem with the boundary condition $\zeta=0$ at the tensile wavefront in $r=r_i + ct$. This solution cancels the right-hand side of equation (4.8). The radial strain is

$$\epsilon_r(r, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \alpha \left(1 + \left(\frac{r_i + ct}{r} \right)^2 \right), \quad (4.10)$$

and thus at the tensile wavefront $\epsilon_r = 2\alpha$. We measure the radial displacement by recording the motion of the regularly spaced marks drawn on the latex sheet. Figure 7 shows that the form of equation (4.9) fits the measurements.

The base of the cone propagates in a stretched area and we find experimentally that the propagation speed does not vary in time. Transverse displacements $\xi(r, t)$ for a membrane are ruled by

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r \sin \phi), \quad (4.11)$$

where ϕ is the angle between a meridian line and the local tangent to the membrane in the radial direction and we have $\sin \phi \approx \partial \xi / \partial r$. The stresses are

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta) \quad \text{and} \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r), \quad (4.12)$$

where $\epsilon_r = \partial \zeta / \partial r$ is the radial strain and $\epsilon_\theta = \zeta / r$ the circumferential strain. The radial strain is positive while the circumferential strain is negative.

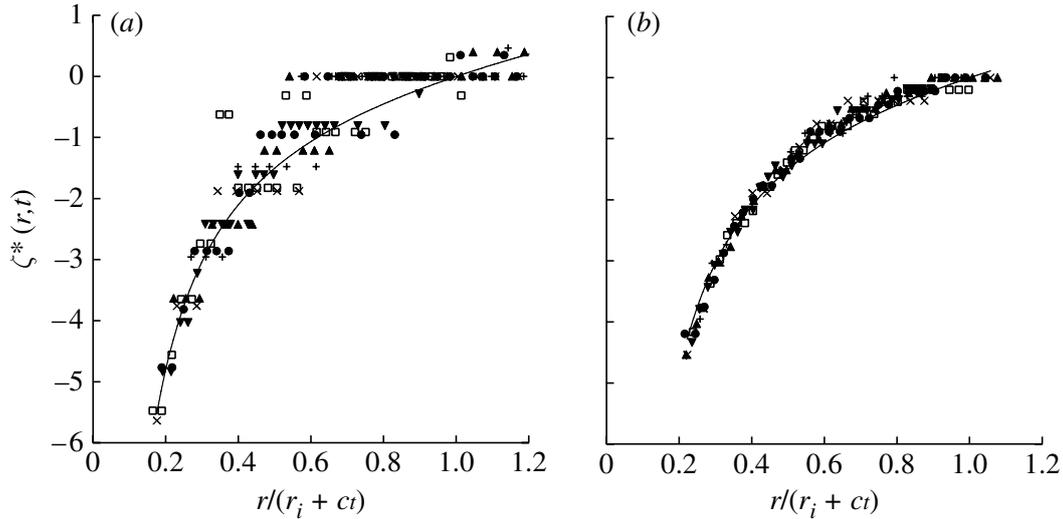


Figure 7. Radial displacement versus radial coordinate. We note $\zeta^*(r, t) = \zeta(r, t)/[\alpha(r_i + ct)]$. The solid line stand for the form given by (4.9) where the parameter α has been fitted. (a) Measurements performed for the impacting velocity $V=12.8 \text{ m s}^{-1}$ at different times after impact. Cross, $167 \mu\text{s}$; plus, $222 \mu\text{s}$; up-triangle, $278 \mu\text{s}$; circle, $333 \mu\text{s}$; square, $389 \mu\text{s}$; down-triangle, $444 \mu\text{s}$; and (b) measurements performed for the impacting velocity $V=20.8 \text{ m s}^{-1}$. Cross, $222 \mu\text{s}$; plus, $278 \mu\text{s}$; up-triangle, $333 \mu\text{s}$; circle, $389 \mu\text{s}$; square, $444 \mu\text{s}$; down-triangle, $500 \mu\text{s}$.

To relate the strain in the stretched domain with the speed of the impactor, we use the same geometrical argument as for the impacted string. The radial strain in the cone is taken as uniform and equal to $\epsilon_c = \epsilon_r(r_c, t)$. The geometrical relation is

$$(1 + \epsilon_c)^2 r_c^2(t) = (Vt)^2 + (\bar{U}t)^2, \quad (4.13)$$

where $r_c(t) = r_i + Ut$ is the (Lagrangian) coordinates of the transverse wavefront and $\bar{U}t = r_c(t) + \zeta(r_c, t)$ is the position of the wavefront in the laboratory frame. The right-hand side in equation (4.13) is based on the assumption that the membrane shape is conical, a good approximation as seen from figure 2a.

Assuming that the transverse wavefront is far from the impactor, i.e. $Ut \gg r_i$, we have

$$\zeta(r_c, t) = \alpha(r_i + ct) \left(\frac{r_i + Ut}{r_i + ct} - \frac{r_i + ct}{r_i + Ut} \right) \approx \alpha ct \left(\frac{U}{c} - \frac{c}{U} \right). \quad (4.14)$$

In this expression α and U are unknown. At the base of the cone, for large t , the radial strain deduced from the approximation for ζ is

$$\epsilon_c = \alpha \left[1 + \left(\frac{r_i + ct}{r_i + Ut} \right)^2 \right] \approx \alpha \left[1 + \left(\frac{c}{U} \right)^2 \right]. \quad (4.15)$$

When σ_r is constant in equation (4.11), transverse displacement waves propagate at speed $c_t = c\sqrt{\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta}$ (e.g. Graff 1975). Thus we have

$$U = c \sqrt{\alpha \left(1 + \nu + (1 - \nu) \left(\frac{c}{U} \right)^2 \right)}, \quad (4.16)$$

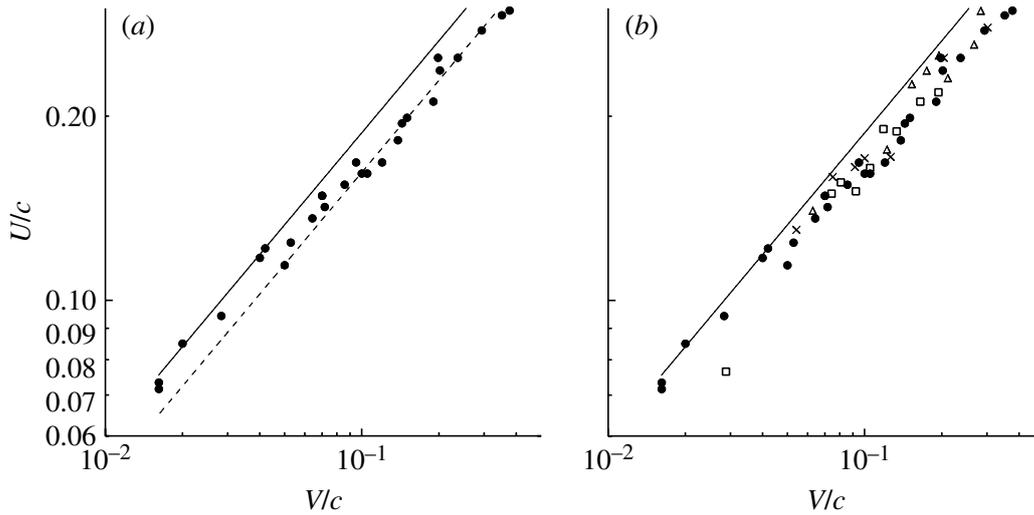


Figure 8. Transverse front velocity versus impact velocity. Velocity U in the lagrangian frame were deduced from the measurements of the transverse front velocity in the laboratory frame \bar{U} . (a) Measurements for a latex sheet of thickness $h=0.10$ mm. The solid line stands for the theoretical prediction with no adjustable parameter, the dashed line stands for the fit by the theoretical curve with an adjustable prefactor, we observe a 30% error on the prefactor. Thickness, $h=0.10$, and (b) measurements for latex sheet of different thicknesses. Circle, 0.10 mm; square, 0.15 mm; cross, 0.2 mm; up-triangle, 0.3 mm.

which gives

$$\alpha = \frac{\left(\frac{U}{c}\right)^4}{1 - \nu + (1 + \nu)\left(\frac{U}{c}\right)^2}. \tag{4.17}$$

In equation (4.13), we have at leading order

$$\left(1 + \frac{2}{1 - \nu} \left(\frac{U}{c}\right)^2\right) (Ut)^2 = (Ut)^2 - \frac{2}{1 - \nu} \left(\frac{U}{c}\right)^2 (Ut)^2 + (Vt)^2, \tag{4.18}$$

and thus

$$\frac{U}{c} = \left(\frac{1 - \nu}{4}\right)^{1/4} \left(\frac{V}{c}\right)^{1/2}. \tag{4.19}$$

Figure 8 shows experimental measurements of the transverse wavefront versus impactor speed. The model that assumes $V/c \ll 1$, overestimates the propagation speed but its dependence on the impacting speed is in good agreement with the experimental data. The model also assumes that $Ut \gg r_i$, but experiments show that the final speed of the transverse wavefront is reached for r very close to r_i (figure 6). The measurements conducted for different sheet thicknesses h show that the transverse front velocity does not depend on h for $0.10 < h < 0.30$ mm, as expected. For larger thicknesses, experiments reveal that the bending rigidity of the latex rubber sheet cannot be neglected, and discrepancies with the elastic membrane model are observed.

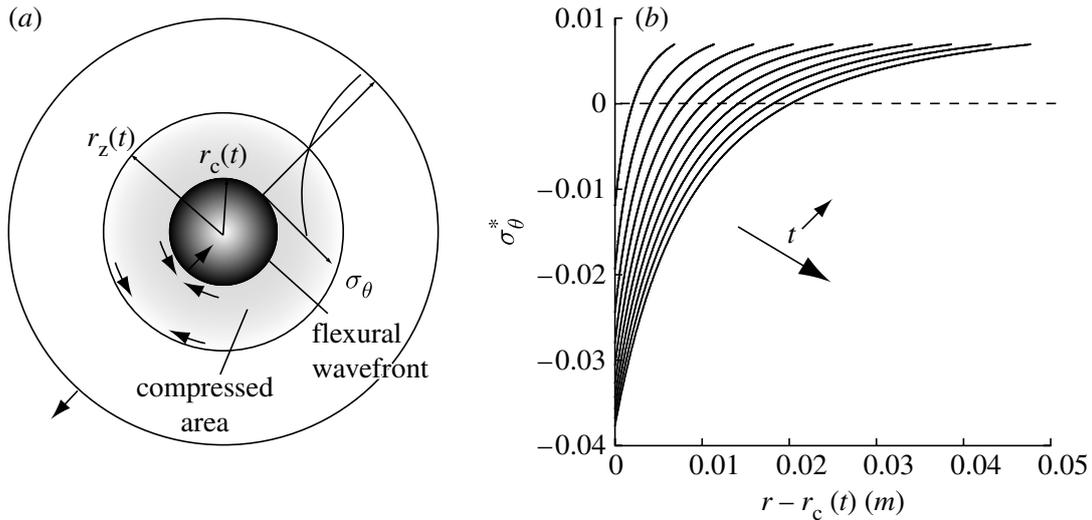


Figure 9. (a) Schematic showing the stress field in the stretched area consecutive to an impact on an elastic membrane. The central dark area is the cone. The shaded area represents the region $r_c(t) < r < r_z(t)$ where circumferential stress is compressive. (b) Variation of the normalized circumferential stress $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta / (E/(1-\nu^2))$ with the distance to the transverse wavefront. The dashed line shows the position where the stress changes sign. The stresses are calculated for a membrane impacted at velocity $V = 5 \text{ m s}^{-1}$ by a 4.5 mm large impactor and for times ranging from 0.3 to 2.1 ms after impact.

(c) *Stress field resulting from an impact on a two-dimensional elastic membrane*

We use the approximation of equation (4.9) for the radial displacement to compute the stress field in the stretched area. With $\alpha = (1/4)(V/c)^2$, we have

$$\sigma_r(r, t) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{V}{2c} \right)^2 \left[1 + \nu + (1-\nu) \left(\frac{r_i + ct}{r} \right)^2 \right], \quad (4.20)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{V}{2c} \right)^2 \left[1 + \nu - (1-\nu) \left(\frac{r_i + ct}{r} \right)^2 \right]. \quad (4.21)$$

These expressions are valid in the domain between $r_c(t) = r_i + Ut$ and $r_t(t) = r_i + ct$. The circumferential stress becomes negative at $r = r_z(t) = [(1-\nu)/(1+\nu)]^{1/2}(r_i + ct)$. Then the area of the plate delimited by the transverse wavefront $r = r_c(t)$ and $r = r_z(t)$ is compressed along the circumferential direction (figure 9). This compression results from a geometrical constrain: consider two points initially at radius r and at angles θ_1 and θ_2 . Initially, the arc length between these two points is $r(\theta_2 - \theta_1)$. After deformation this distance is reduced to $[r + \zeta(r, t)](\theta_2 - \theta_1)$ where $\zeta(r, t)$ is negative.

5. Dynamic wrinkling

In thin sheets, in-plane compressive stresses lead to the formation of wrinkles. In this section, we study the appearance of wrinkles and we compute their size. As usual for buckling instabilities, this size results from a balance between destabilization induced by the circumferential compression, and restoring forces

due to the sheet bending rigidity. To model the behaviour of the compressed area, we investigate the analogue problem of the stability of an annular plate, of inner radius $r_c(t)$ and outer radius $r_z(t)$, to which is applied the in-plane stress field (both radial and circumferential) found in §4c. The problem is similar to the static problem studied by Géminard *et al.* (2004). Coman & Haughton (2006) also proposed a theoretical analysis of the problem. These authors studied the stability of the plan solution and computed the shape of the unstable mode as a function of r and θ . We adopt a global method imposing the shape of the pattern, providing the instability threshold and azimuthal wavelength. Later on, we also discuss a simplified model, approximating the annulus with a beam, resembling the method used by Senior (1956) in the context of wrinkling in metal punching but with added inertia.

(a) *Instability of the stretched membrane*

The Rayleigh method (Rayleigh 1894) is an application of the least-action principle to vibrating systems whose dynamics is on purpose restricted to one degree of freedom. The method consists in making the inventory of the elastic energies involved, namely the bending energy U_b , the circumferential compressive energy U_c , the radial tensile energy U_t , construct a potential $U = U_b + U_c + U_t$ and then write

$$\delta \int dt (T - U) = 0, \quad (5.1)$$

where T is the sheet kinetic energy, and δ stands for a variation in the displacements ξ_n that make the integral minimum. The optimum provides the dispersion relation of the problem for given in-plane stresses σ_r and σ_θ . We consider a single radial bent, imposing $\xi = 0$ at the inner radius $r = r_c(t)$ and outer radius $r = r_z(t)$ and account for n folds in the circumferential direction as

$$\xi(r, \theta, t) = \frac{(r - r_c)(r - r_z)}{(r_z - r_c)^2} \xi_n \sin(n\theta) e^{\gamma_n t}, \quad (5.2)$$

where ξ_n and γ_n are, respectively, the amplitude and the growth rate. This form assumes that the out of plane displacement for $r > r_z$ is zero.

— The expression for the bending energy is

$$U_b = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_c}^{r_z} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right) + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \right)^2 \right\} r dr d\theta, \quad (5.3)$$

where $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ is the bending rigidity (Timoshenko & Woinowsky-Krieger 1959). With ξ given by equation (5.2), the bending energy writes

$$U_b = \frac{\pi D \xi_n^2 e^{2\gamma_n t}}{2(r_z - r_c)^4} \left\{ \left[-3(r_z^2 - r_c^2) + (r_c^2 + 4r_c r_z + r_z^2) \ln \frac{r_z}{r_c} \right] n^4 + 2 \left[4(r_z^2 - r_c^2) - (r_c^2 + 6r_c r_z + r_z^2) \ln \frac{r_z}{r_c} \right] n^2 + \left[(r_c + r_z)^2 \ln \frac{r_z}{r_c} \right] \right\}. \quad (5.4)$$

—In-plane stresses also contribute to the elastic energy of the system. The compressive circumferential stress σ_θ yields a compressive energy U_c while the radial stress σ_r yields a tension energy U_t . They are given by

$$U_c = \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_c}^{r_z} \left\{ \sigma_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r \, dr \, d\theta, \tag{5.5}$$

$$U_t = \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_c}^{r_z} \left\{ \sigma_r \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 \right\} r \, dr \, d\theta. \tag{5.6}$$

The compressive and tensile energies thus write

$$U_c = \frac{\pi D \xi_n^2 e^{2\gamma_n t} n^2}{2h^2 (r_c - r_z)^4} \left(\frac{V}{2c} \right)^2 I_c, \tag{5.7}$$

$$U_t = \frac{\pi D \xi_n^2 e^{2\gamma_n t}}{h^2 (r_c - r_z)^4} \left(\frac{V}{2c} \right)^2 I_t, \tag{5.8}$$

with

$$I_c = \frac{1}{2} \left\{ (1 - \nu)(r_i + ct)^2 \left[36(r_z^2 - r_c^2) - 12(r_z^2 + 4r_c r_z + r_c^2) \ln \frac{r_z}{r_c} \right] \right. \\ \left. + (1 + \nu) \left[12r_c^2 r_z^2 \ln \frac{r_z}{r_c} + (r_z^2 - r_c^2)(r_c^2 - 8r_c r_z + r_z^2) \right] \right\}, \tag{5.9}$$

and

$$I_t = (1 - \nu)(r_i + ct)^2 \left[6(r_c + r_z)^2 \ln \frac{r_z}{r_c} - 12(r_z^2 - r_c^2) \right] + (1 + \nu)(r_z^2 - r_c^2)^2. \tag{5.10}$$

—Finally, the kinetic energy is given by

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_c}^{r_z} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right\} r \, dr \, d\theta. \tag{5.11}$$

Using $\rho = 12D/(c^2 h^3)$, we have

$$T = \frac{\pi D \xi_n^2 \gamma_n^2 e^{2\gamma_n t}}{10c^2 h^2} (r_z^2 - r_c^2). \tag{5.12}$$

Then, using (5.1), we find the dispersion equation for the circumferential wavenumber n . In terms of the dimensional circumferential wavenumber calculated at the inner radius $k_n = n/r_c$, the dispersion relation reads

$$\frac{(r_z - r_c)^4 (r_z^2 - r_c^2)}{10c^2 h^2} \gamma_n^2 + \frac{1}{2} k_n^4 r_c^4 \left[-3(r_z^2 - r_c^2) + (r_c^2 + 4r_c r_z + r_z^2) \ln \frac{r_z}{r_c} \right] \\ + k_n^2 r_c^2 \left[4(r_z^2 - r_c^2) - (r_c^2 + 6r_c r_z + r_z^2) \ln \frac{r_z}{r_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{V}{2c} \right)^2 \frac{I_c}{h^2} \right] \\ + \frac{1}{2} (r_c^2 + r_z^2) \ln \frac{r_z}{r_c} + \left(\frac{V}{2c} \right)^2 \frac{I_t}{h^2} = 0. \tag{5.13}$$

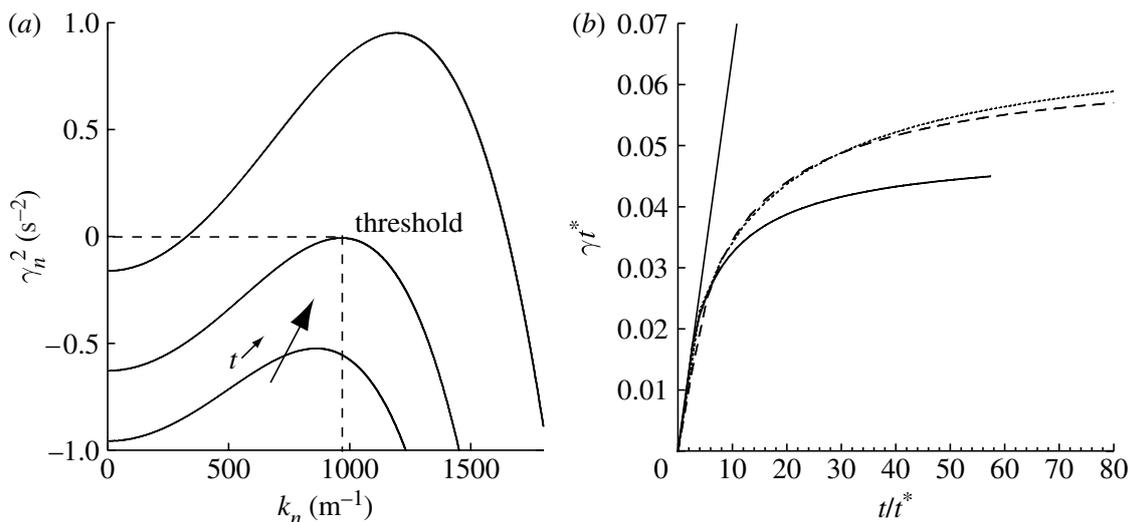


Figure 10. (a) Variation of the instability growth rate with the wavenumber. The dispersion relation was calculated numerically for a projectile of radius $r_i = 2.25 \text{ mm}$ impacting a plate of thickness $h = 0.15 \text{ mm}$ at impacting velocity $V = 10 \text{ m s}^{-1}$. The dispersion relation is calculated for several times after impact: $300 \mu\text{s}$, $365 \mu\text{s}$ and $700 \mu\text{s}$. We observe a finite wavenumber at the instability threshold. (b) Time evolution of the maximal growth rate γ as a function of time. Times are normalized by $t^* = h/v$, $h = 0.15 \text{ mm}$. Solid line, $V = 5 \text{ m s}^{-1}$; dashed line, $V = 10 \text{ m s}^{-1}$; dotted line, $V = 15 \text{ m s}^{-1}$.

The second term (proportional to k_n^4) is always positive and thus at short wavelength, γ_n^2 is negative and the solution is stable. The source of the instability is the term proportional to I_c . Substituting time dependence for the radius r_z and r_c , we obtain a dispersion equation dependent on time (figure 10). At a critical time t_{inst} , the sign of γ_n^2 changes and the axisymmetric solution becomes unstable. A wavelength is selected by the instability.

The critical time at which the axisymmetric solution becomes unstable can be computed by looking for a double root of the equation in k_n obtained by looking at solutions $\gamma_n = 0$. A wavelength is associated with this critical time. Comparison between the wavelength computed from equation (5.13) and the experimental wavelength shows a good agreement (figure 11). However, for very thin sheets and high-impacting speeds (figure 11a), the instability develops at early times and the approximation $r \gg r_i$ used to obtain equation (4.19) is no longer valid.

We also measured the time at which we started to observe wrinkling (figure 12). This time is not *stricto sensu* equal to t_{inst} because the wrinkles need time to grow, whereas at the instability threshold (i.e. at time t_{inst}), the growth rate is zero. Above t_{inst} , the maximal growth rate γ increases itself in time (figure 10b) and saturates over a time period of approximately $10 h/V$. Figure 12 shows that the typical wrinkling time is indeed $t_{\text{inst}} + 10 h/V$.

(b) Approximation of the instability wavelength

An explicit form for the critical time t_{inst} and the instability wavelength λ cannot be easily computed from equation (5.13). In the limit $r_i \rightarrow 0$ and assuming that V/c is small, the instability occurs at large times. The compressed area

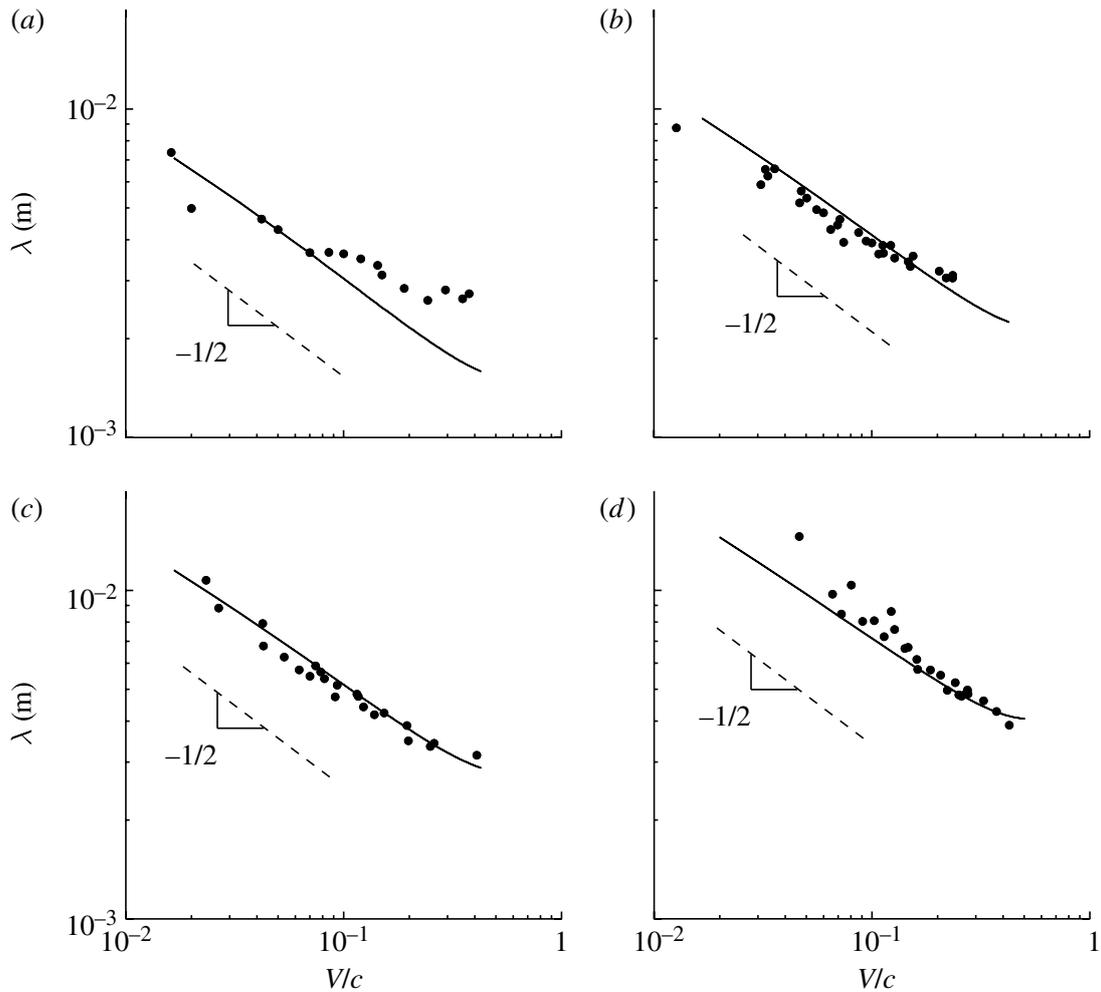


Figure 11. ((a)–(d)) Variation of the buckled wavelength with the impacting velocity. We conducted experiments with a projectile of radius $r_i=2.25$ mm and latex sheets of different thicknesses. The solid lines stand for the theoretical predictions with no adjustable parameter. (a) $h=0.10$ mm; (b) $h=0.15$ mm; (c) $h=0.20$ mm; (d) $h=0.30$ mm.

shown in figure 9 has a large radius and its curvature can be neglected, hence, we propose the following toy model to understand the instability mechanism: consider an elastic beam of length $\pi[r_z(t)+r_c(t)]$ and width $b=r_z(t)-r_c(t)$ with a compression

$$\sigma_c = \sigma_\theta(r_c) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{V}{2c} \right)^2 \left[(1+\nu) - 2\sqrt{1-\nu} \frac{c}{V} \right] \approx -\frac{E}{1-\nu^2} \sqrt{1-\nu} \frac{V}{2c}. \quad (5.14)$$

The dispersion equation (Lindberg 1965; Vermorel *et al.* 2007) is

$$\omega^2 = \frac{EI}{\rho bh} k^2 \left\{ k^2 + \sigma_c \frac{bh}{EI} \right\}, \quad (5.15)$$

where $I=bh^2/12$ is the area moment of inertia. The straight configuration of the beam is unstable and a dynamic buckling instability develops. This instability selects a most amplified wavelength

$$\lambda_{\max} = \pi h \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{E}{|\sigma_c|}} \approx \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi (1+\nu)^{1/2} (1-\nu)^{1/4} h \left(\frac{V}{c} \right)^{-1/2}. \quad (5.16)$$

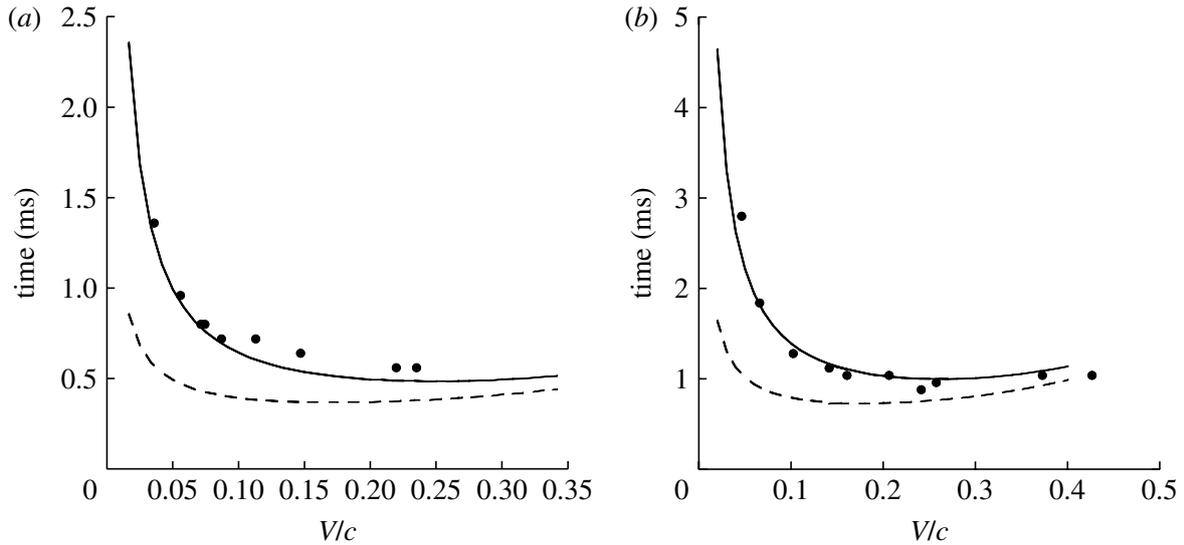


Figure 12. Development time of the wrinkling instability observed experimentally as a function of the impacting velocity. Dashed line, contribution of t_{inst} only; solid line, $t_{\text{inst}} + 10h/V$ (see text). (a) $h=0.15$ mm; (b) $h=0.30$ mm.

The scaling above $\lambda \propto h(V/c)^{-1/2}$ is precisely the one observed experimentally for moderately thin sheets (figure 11). The instability time of growth is

$$\tau_{\text{growth}} = \frac{\sqrt{3}}{3} h \frac{1}{c} \frac{E}{|\sigma_c|} \approx 2 \frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \nu^2) \frac{h}{V}, \quad (5.17)$$

whose scaling again recovers that of t_{inst} .

6. Conclusion and discussion

(a) Summary

We have shown that a transversely impacted thin sheet experiences a buckling instability leading to the growth of radial wrinkles. The instability results from a ‘geometrical confinement’ of the material points that are pulled by the impactor towards the impact point. The wavelength is correctly predicted by a quasistatic analysis of a time-varying substrate. Interestingly, this instability is not observed in clamped circular sheets with a central transverse force. On the other hand, this instability occurs in membranes that are geometrically constrained at one or two different radii as in Géminard *et al.* (2004), Huang *et al.* (2007) or Chopin *et al.* (2008). The necessary confinement occurs in the present case because the tensile wavefront propagates faster than the transverse wavefront. The main difference with the static case concerns the wrinkle pattern: in the static case, a number of wrinkles are selected and the wavelength changes with the distance from the centre while here the wavelength is conserved.

We also note the similarity between the patterns resulting from this wrinkling instability and the cracks that are observed on impacted plates of brittle materials, whose analysis is left for future work.

Modification of geometry, boundary conditions, impact parameters or material properties may only modify the critical radius (and critical time) at which the instability develops. Thus, our model does not predict a threshold for the

buckling instability. In the following, we discuss different limitations of our model. In particular, we discuss the effects of the inertia of the impactor and of the size and thickness of the latex sheet.

(b) *Deceleration of the impacting body*

We assumed that the velocity of the impactor V does not change during impact. If the mass of the impactor is finite, however, it decelerates. Using the results of §4*b*, the rate of decrease of the impactor's velocity can be estimated from momentum conservation of the system composed of the impactor and the mass of the membrane displaced vertically.

Consider a rigid impactor of mass M_p , impacting an elastic sheet at initial impacting velocity V . The part of the sheet whose motion is vertical is the area delimited by the transverse wavefront resulting from impact. The vertical velocity of the membrane at the impact point is the same as the impactor current velocity $v(t)$. As an approximation, we consider that the transverse wavefront velocity depends only on the initial impacting velocity V as if the impactor had an infinite mass and we use the result from (4.19). Then, the mass of the membrane moving vertically is

$$M_m = \rho h \pi (Ut)^2 = \pi \rho h \left(\frac{1-\nu}{4} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{c} \right) c^2 t^2. \quad (6.1)$$

Conservation of momentum in the vertical direction writes as

$$\frac{d}{dt} \{ (M_p + M_m) v \} = (M_p + M_m) \frac{dv}{dt} + v \frac{dM_m}{dt} = 0. \quad (6.2)$$

Hence the differential equation satisfied by $v(t)$

$$\frac{dv}{dt} = - \left(\frac{2t}{t^2 + \tau^2} \right) v, \quad \text{with} \quad \tau^2 = \frac{M_p}{\pi \rho h \left(\frac{1-\nu}{4} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{c} \right) c^2}, \quad (6.3)$$

which integrates into

$$v(t) = \frac{V}{1 + (t/\tau)^2}. \quad (6.4)$$

Measurements of the impactor velocity $v(t)$ and of the characteristic deceleration time τ shown in figure 13 are in a good agreement with equation (6.4). The typical observation time in the present experiments does not exceed 2 ms after the time of impact. The mass of the impactor associated to $\tau = 2$ ms for a membrane thickness $h = 0.30$ mm and for an impacting velocity $V = 30$ m s⁻¹ is $M_p = 2.4 \times 10^{-3}$ kg. The experiments presented in this work were all conducted with $M_p = 3.3 \times 10^{-3}$ kg or larger, masses for which deceleration does not alter our conclusions.

(c) *Finite size effects*

According to the dispersion equation (5.13), the instability develops for any impacting speed. However, finite size limitations can modify the dynamics. The tension front reaches the extremity of the sheet in $r = r_0$ at time $t_0 = r_0/c$.

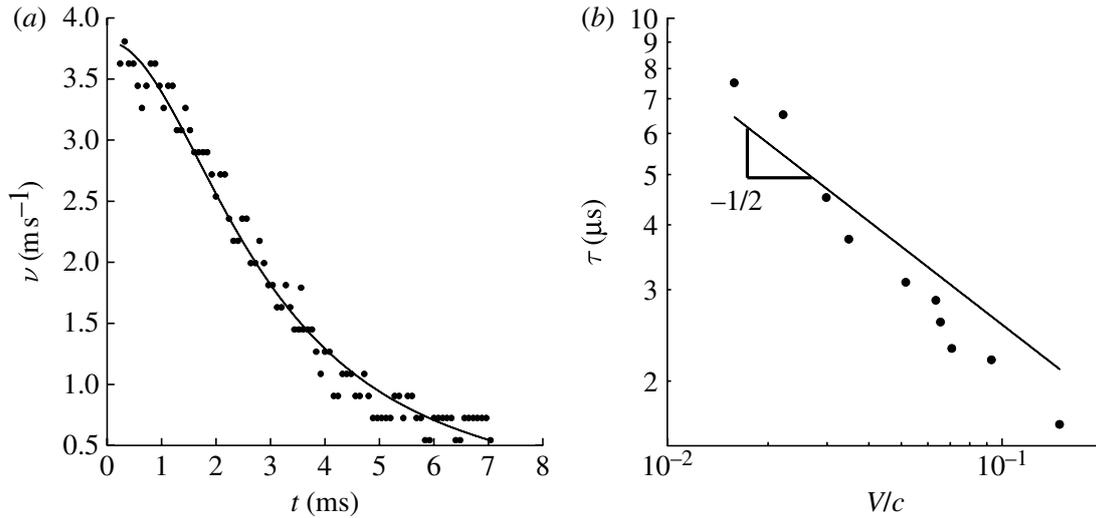


Figure 13. (a) Variation of the velocity of the impactor (a steel ball of mass $M_p = 0.33 \times 10^{-3}$ kg) with time. The solid line stands for the fitting curve with one adjustable parameter evaluating the characteristic time τ . The data fit provides $\tau = 2.92$ ms while the theoretical value is 2.9 ms. $h = 0.15$ mm; $V = 3.8 \text{ m s}^{-1}$, and (b) variation of the characteristic time τ with the impacting velocity. The solid line stands for the fit by the theoretical power law $(V/c)^{-1/2}$. The error on the prefactor does not exceed 10 per cent. $h = 0.15$ mm.

This front rebounds and if it reaches the position $r = r_z$ before the development of the instability, the stress field changes, and we expect a modified dynamics. Thus the critical size for the membrane is given by the criterion

$$\frac{r_i - r_0}{c} + \frac{r_0 - r_z(t_{\text{inst}})}{c} < t_{\text{inst}}. \quad (6.5)$$

The measurements in the present experiments (wave speed, radial displacements, wavelengths) were performed before perturbation by the rebounding front. We also note that the shape of the rebounding front depends on the boundary conditions (free, clamped). However, as long as there is no interaction with the rebounding wavefronts, the boundary conditions do not influence the dynamics and the development of the instability. This is a difference with the static situation where the boundary conditions are fundamental in predicting the onset of wrinkling.

(d) Pure bending waves

Finally, our model for transverse wave propagation disregards the dynamics of pure bending waves, decoupled from tension in the sheet. We briefly discuss the validity of this model in the one-dimensional case. If flexural stiffness is taken into account equation (4.1) now reads

$$EA r^2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad (6.6)$$

where r is the radius of gyration of the beam ($r^2 = h^2/12$ for a rectangular cross section of thickness h) and $T = EA\epsilon$. We note that this equation is valid at times larger than h/c . When the beam is impacted, transverse waves propagate as

bending waves and tension increases gradually as a consequence of transverse motion. Consequently, any localized disturbance, say $\xi(r, t=0) = f(r)$, will propagate according to (6.6) as a wave packet $\xi(r, t) = F(r/\sqrt{\kappa t})$, where $\kappa = cr$ and $F(\cdot)$ is an eigenfunction of (6.6) (e.g. Graff 1975). The wave packet thus expands over a typical width increasing as $\sqrt{\kappa t}$. Now, the tension front sustained by the continuing traction of the impactor has propagated radially over a distance ct at time t . Thus assuming that the tensile strain is uniform over the stretched domain, we estimate the strain in the beam as follows: the segment of initial length ct now has a length of $ct - \sqrt{\kappa t} + [\kappa t + (Vt)^2]^{1/2}$ and thus the strain is

$$\epsilon = \frac{ct - \sqrt{\kappa t} + [\kappa t + (Vt)^2]^{1/2} - ct}{ct} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V}{c}\right)^2 \frac{ct}{\sqrt{\kappa t}}. \quad (6.7)$$

Using this estimate, we compare the two first terms in equation (6.6): the bending term writes $EAr^2(Vt)/(\kappa t)^2$ and the tension term writes $EA(V/c)(ct/\sqrt{\kappa t})Vt/\kappa t$. Thus the bending term dominates until a critical time

$$t_b = \frac{r}{V} \left(\frac{c}{V}\right)^{1/3} \propto \frac{h}{V} \left(\frac{c}{V}\right)^{1/3}, \quad (6.8)$$

above which the restoring force due to tension overcomes the intrinsic bending rigidity. This time is greater than h/V and thus the impactor must have travelled a distance greater than h for the tension to be large enough. In two dimensions, we expect the same limitation but in our experiments h/V (typically 10^{-5} s) is very short compared to observation times; our model neglecting bending rigidity is valid.

This work was supported by the Agence Nationale de La Recherche through the grant ANR-05-BLAN-0222-01. R.V. was supported by the Délégation Générale à l'Armement.

References

- Backman, M. A. & Goldsmith, W. 1978 The mechanics of penetration of projectiles into target. *Int. J. Eng. Sci.* **16**, 1–99. (doi:10.1016/0020-7225(78)90002-2)
- Begley, M. R. & Mackin, T. J. 2004 Spherical indentation of freestanding circular thin films in the membrane regime. *J. Mech. Phys. Solids* **52**, 2005–2023. (doi:10.1016/j.jmps.2004.03.002)
- Bouasse, H. & Carrière, Z. 1903 Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 2e série* **5**, 257–283.
- Cerda, E., Mahadevan, L. & Pasini, J. M. 2004 The elements of draping. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* **101**, 1806–1810. (doi:10.1073/pnas.0307160101)
- Chopin, J., Vella, D. & Boudaoud, A. 2008 The liquid blister test. *Proc. R. Soc. A* **464**, 2887–2906. (doi:10.1098/rspa.2008.0095)
- Coman, C. D. & Haughton, D. M. 2006 Localized wrinkling instabilities in radially stretched annular thin films. *Acta Mech.* **185**, 179–200. (doi:10.1007/s00707-005-0307-2)
- Géminard, J.-C., Bernal, R. & Melo, F. 2004 Wrinkle formations in axi-symmetrically stretched membranes. *Eur. Phys. J. E* **15**, 117–126. (doi:10.1140/epje/i2004-10041-1)
- Graff, K. G. 1975 *Wave motion in elastic solids*. New York, NY: Dover Publications.
- Huang, J., Juszkievicz, M., de Jeu, W.H, Cerda, E., Emrick, T., Menon, N. & Russell, T. P. 2007 Capillary wrinkling of floating thin polymer films. *Science* **317**, 650–653. (doi:10.1126/science.1144616)
- Lindberg, H. E. 1965 Impact buckling of a bar. *J. Appl. Mech.* **32**, 315–322.
- Love, A. E. H. 1944 *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4th edn. New York, NY: Dover Publications.

- Mullins, L. 1947 Effect of stretching on the properties of rubber. *J. Rubber Res.* **16**, 275–289.
- Phoenix, S. L. & Porwal, P. K. 2003 A new membrane model for the ballistic impact response and V50 performance of multi-ply fibrous systems. *Int. J. Solids Struct.* **40**, 6723–6765. (doi:10.1016/S0020-7683(03)00329-9)
- Rayleigh, J. W. S. 1894 *The theory of sound*. New York, NY: Dover Publications.
- Senior, B. W. 1956 Flange wrinkling in deep-drawing operations. *J. Mech. Phys. Solids* **4**, 235–246. (doi:10.1016/0022-5096(56)90032-1)
- Timoshenko, S. & Woinowsky-Krieger, S. 1959 *Theory of plates and shells*. New York, NY: McGraw-Hill.
- Vermorel, R., Vandenberghe, N. & Villiermaux, E. 2007 Rubber band recoil. *Proc. R. Soc. A* **463**, 641–658. (doi:10.1098/rspa.2006.1781)

3 Conclusion

3.1 Lien avec la fragmentation des plaques fragiles

L'étude sur les membranes élastiques a mis en évidence le mécanisme de l'instabilité de flambage dynamique consécutive à l'impact. Ainsi, le modèle théorique démontre, en bon accord avec les expériences, que l'instabilité sélectionne une longueur d'onde de flambage plutôt qu'un nombre de plis.

Clairement, les expériences montrent que le nombre de plis augmente avec le temps et donc avec la distance au point d'impact. On observe ainsi un réarrangement des plissements au cours de la propagation des front d'ondes consécutifs à l'impact. Au cours du temps, de nouveaux plis se forment afin de conserver la longueur d'onde sélectionnée en fonction de l'état de contrainte du matériau. Cet aspect caractéristique du phénomène est en contradiction avec les expériences menées sur les plaques fragiles. En effet, nous avons vu au chapitre 3 que le nombre de fissures radiales, lui, diminuait avec la distance au point d'impact. Cette première différence va à l'encontre du scénario qui expliquerait la brisure d'une plaque fragile par une instabilité de flambage dynamique.

Par ailleurs, si on effectue le calcul direct du temps de développement de l'instabilité en considérant les propriétés des plaques en PMMA, on obtient un temps de l'ordre de 0.2 ms pour une épaisseur de plaque de 1 mm. Ce temps est environ 20 fois supérieur au temps de brisure dans les expériences sur les plaques fragiles. Bien entendu, l'influence des ondes de flexion pure, négligées dans le cas des membranes, empêche d'accorder du crédit à l'application directe du modèle au cas des plaques. En effet, dans le cas des plaques, nous avons vu que la dynamique de la déformation conique, due à l'impact, était bien prédite par la réponse purement flexionnelle de la plaque. De plus, nous n'avons jamais observé d'instabilité de flambage dynamique préalable à la brisure des plaques fragiles.

Dès lors, on comprend que les déformations coniques observées à la fois pour les membranes et les plaques sont de nature différentes :

- dans le premier cas, la propagation d'ondes transverses n'est rendue possible que par la tension dans le plan de la membrane. En outre, c'est la réponse élastique dans le plan qui détermine toute la dynamique.
- dans le second cas, l'épaisseur de la plaque est telle qu'on ne peut plus négliger la flexion pure devant les déformations dans le plan. Ainsi, la déformation transverse consécutive à l'impact est déterminée par la réponse flexionnelle pure de la plaque.

De ce fait, à l'inverse des membranes, dans le cas des plaques, les déformations dans le plan se déduisent des déformations transverses. Dans ces conditions, on imagine que la brisure peut être comprise en étudiant directement la réponse flexionnelle consécutive à l'impact, et que la rupture de l'axi-symétrie du problème intervient par l'apparition d'une première fissure et non pas par une instabilité de flambage

azimutal secondaire.

En somme, l'étude présentée a mis en évidence des divergences phénoménologiques entre le problème de l'impact d'une membrane et celui d'une plaque. Qui plus est, l'instabilité de flambage dynamique n'a jamais été observée expérimentalement avec les plaques (voir 3). De plus, le fait que les fissures se développent toutes du côté opposé à la face subissant l'impact, ne plaide pas pour une instabilité de flambage qui présenterait une déformation avec des courbures alternées. L'ensemble de ces remarques écartent la thèse selon laquelle une telle instabilité élastique conduirait à la brisure des plaques fragiles.

3.2 Intérêt de l'étude

L'impact d'une membrane par un projectile fait partie des phénomènes d'impact provoquant l'apparition de structures radiales dans une configuration initialement axi-symétrique. Visuellement, le problème s'apparente au "petalling" des plaques élasto-plastiques ou bien à la brisure en fissures radiales d'une plaque fragile. Dès lors, dans le cadre de cette thèse, la question de l'intérêt de l'étude approfondie de ce phénomène ne se pose pas. Ainsi, en comparant ce travail aux expériences réalisées sur les plaques, nous sommes parvenus à mieux cerner les différences fondamentales entre les deux problèmes. En outre, nous avons écarté le scénario selon lequel une instabilité de flambage dans la direction azimutale mènerait à la brisure d'une plaque fragile.

Par ailleurs, à notre connaissance, ce travail est le premier à documenter et analyser l'instabilité de flambage azimutal d'une membrane dans le cas dynamique. Au delà de son intérêt académique, ce travail peut s'avérer intéressant dans le contexte de la réponse balistique de systèmes fibreux (textile), trouvant notamment des applications dans la conception de gilets pare-balles.

Chapitre 5

Perforation d'une feuille fragile et fragmentation en pétales

1 Introduction

La perforation d'une plaque ou d'une coque est un problème rencontré dans de nombreuses applications, telles que militaires, industrielles ou même aérospatiales. Parmi les modes de rupture d'une plaque subissant la pénétration d'un impacteur ou d'un indenteur, la fragmentation en pétales présente une phénoménologie particulièrement riche. En effet, l'apparition de fissures se propageant dans la direction radiale pose le problème de la sélection de leur nombre et de l'auto-organisation du réseau de fissures. En outre, dans l'étude expérimentale sur les impacts sur des plaques fragiles (voir chapitre 3), nous avons vu que le nombre de fissures variait avec la distance au point d'impact et la vitesse du projectile. De nombreuses études furent réalisées sur le sujet dans le cas de comportements élasto-plastiques. Ainsi, en 1985, B. Landkof & W. Goldsmith [34] se sont intéressés à l'énergie absorbée par une plaque perforée en pétales par un projectile conique. Leur approche fondée sur des critères de conservation et de minimisation d'énergie met en compétition l'énergie de propagation des fissures avec l'énergie de déformation des pétales. Les travaux similaires de K. Kaminishi & al [35] complètent cette étude en considérant l'énergie dissipée avant rupture. D'autres travaux s'intéressent à l'influence du type de projectile : E. Cheshire & al étudièrent la perforation d'une plaque par des projectiles pyramidaux, tandis que T. Wierzbicki [36] s'intéressa au *petalling* produit par une charge explosive au contact d'une plaque de métal. Toutes ces études se rapportent à des cas de perforations dynamiques sur des plaques épaisses en considérant la déformation des pétales comme purement plastique. Par conséquent le problème de la fragmentation en pétales dans un cas purement fragile reste ouvert. Toutefois, des études furent menées, dans la limite des faibles épaisseurs, sur des problèmes de fragmentations de films fragiles. Ainsi, l'étude théorique de H.J. Herrmann et J. Kertész [37], sur le problème plan d'une membrane annulaire soumise à un échelon de pression sur son bord intérieur, démontre l'instabilité de cette dernière, de nature à provoquer la naissance de fissures. Par ailleurs, B. Audoly & al [38], s'intéressèrent à la déchirure d'un film fragile par un indenteur déplacé dans le plan du film. La détermination du trajet instable de la fissure fût réalisé grâce à de simples considérations géométriques comparables à celles de la présente étude.

Les travaux présentés ici se rapportent à la perforation statique d'un film fragile et sa fragmentation en pétales. Tout comme l'étude sur l'impact des membranes, l'objectif est de comprendre au mieux un problème dont la phénoménologie s'apparente à celle de la fragmentation des plaques fragiles. Le choix d'un film fragile plutôt qu'une plaque s'explique par le fait que la faible épaisseur de l'objet permet de contourner de nombreuses difficultés théoriques introduites par le couplage entre déformations planes et flexion dans le cas des plaques épaisses. Le modèle théorique développé permet de prédire l'évolution et la sélection du motif de brisure au cours de la pénétration et ce en bon accord avec les expériences.

2 Présentation de l'expérience

Cette partie regroupe toutes les informations concernant les différents protocoles expérimentaux pratiqués lors de l'étude. Nous présentons également les mesures effectuées sur les matériaux utilisés afin de caractériser leurs propriétés.

2.1 Dispositif Expérimental

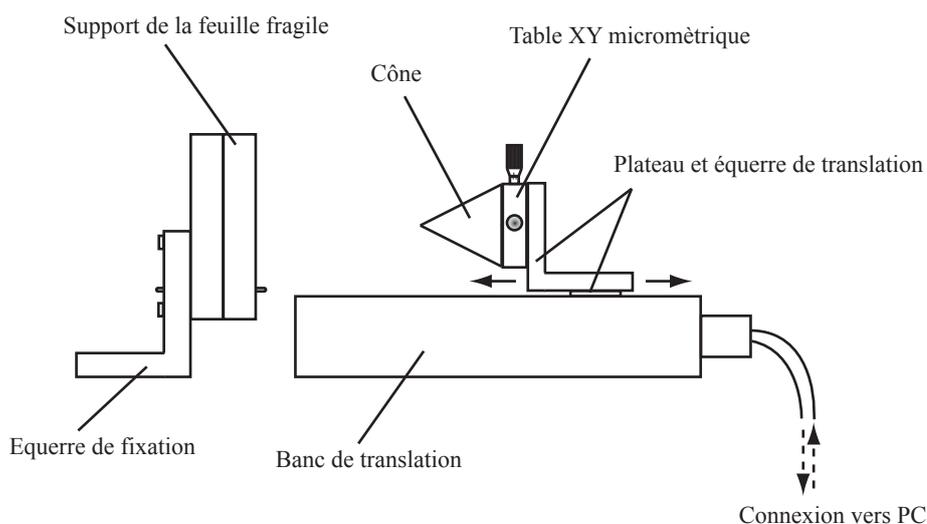


FIG. 5.1 – Dispositif expérimental.

L'expérience menée dans cette étude consiste à perforer une feuille fragile de forme circulaire avec un cône. Le cône pénètre dans la feuille en son centre et perpendiculairement au plan de celle-ci. L'expérience est réalisée de manière quasi-statique, c'est à dire que la pénétration du cône se fait pas par pas. Chaque pas successif s'opère sur une profondeur de pénétration δz petite comparée aux dimensions de la zone de contact entre la feuille et le cône. En effet, le rayon du cône intersecté par le plan de la feuille, appelé rayon de pénétration et noté R , est tel que $\delta z/R \simeq 10^{-2}$. De ce fait, à chaque pas, le système se trouve dans un état d'équilibre proche de son état d'équilibre antérieur.

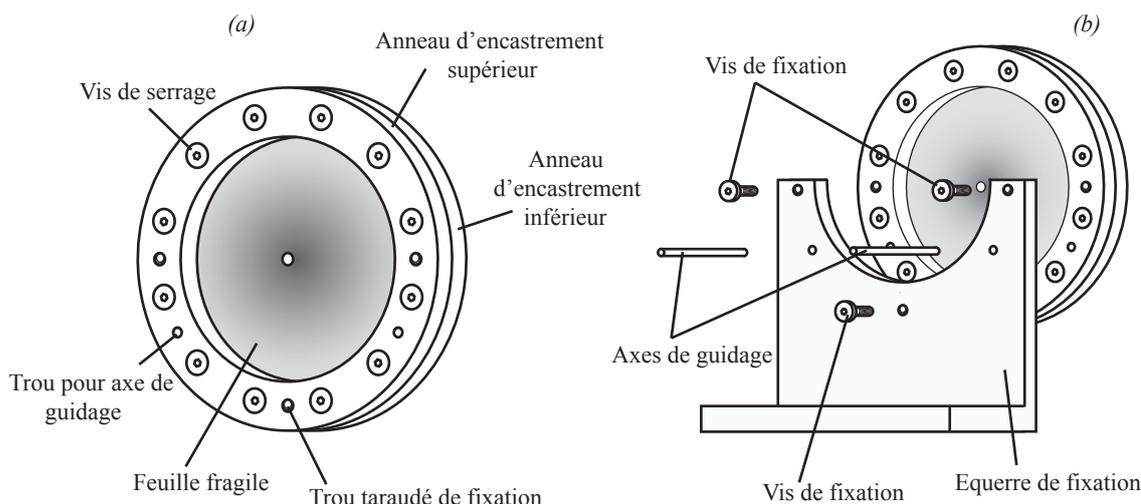


FIG. 5.2 – (a) Schéma du support servant à encastrer la feuille fragile. (b) Schéma montrant le dispositif qui sert à fixer la feuille fragile sur le plan de travail.

La figure 5.1 montre le dispositif expérimental utilisé. La feuille fragile est logée dans un support annulaire qui permet d'encastrer son bord extérieur (voir figure 5.2 (a)). Ce support est lui même solidement fixé au plan de travail à l'aide d'une équerre de fixation (voir figure 5.2 (b)). Face à la feuille fragile se trouve un banc de translation, motorisé et piloté par ordinateur, sur lequel est fixé le cône qui fait office de perforateur. Les cônes utilisés dans l'expérience ont des angles au sommet de 45° et 20° . Toutefois, dans les expériences statiques, aucune influence de l'angle du cône n'est observée. Le cône est fixé au banc de translation par le biais d'une équerre et d'une table XY à réglage micrométrique. Cette table XY permet un réglage de précision du centrage du cône par rapport à la feuille fragile circulaire. Par ailleurs, le montage est réalisé de manière à ce que le cône demeure perpendiculaire au plan de la feuille, et ce tout au long de l'expérience.

La figure 5.2 (a) montre en détails le support annulaire qui sert à encastrer la feuille fragile tel un étiau. Celui-ci est composé de deux anneaux en acier inoxydable, de rayon intérieur $R_p = 60$ mm, pouvant être serrés l'un contre l'autre grâce à des vis de serrage disposées sur toute la circonférence. Des accessoires non représentés sur la figure permettent de s'assurer que la feuille n'est pas déformée et reste au repos pendant le serrage de la pièce. Une fois la feuille logée dans le support, on utilise un emporte pièce pour percer un trou au centre de la feuille. Ce trou évite que la pénétration du cône dans la feuille ne débute par une phase de perforation dynamique qui n'est pas l'objet de cette étude et qui est de nature à modifier les résultats. En effet, lors de la perforation sans trou initial, c'est la tension radiale induite par la flexion de la feuille qui provoque la première brisure. Au voisinage de la pointe du cône, on observe alors une rupture de la membrane dans la direction azimutale, donnant naissance à un trou. Dès lors, s'ensuit une phase dynamique durant laquelle la feuille glisse brutalement le long du cône et rompt en fissures radiales. Mais dans le cas dynamique, l'angle au sommet du cône influe de manière importante sur le nombre de fissures sélectionné, ce qui diffère du cas statique et

fera l'objet de futurs travaux. Par ailleurs, le support peut être placé sur un plateau diviseur, si bien qu'on peut découper des fissures radiales réparties suivant un angle bien défini. Cette méthode permet de débiter l'expérience avec un motif de brisure imposé. La feuille fragile convenablement préparée, le support annulaire est alors vissé sur une équerre qui, elle, demeure fixée au plan de travail (voir figure 5.2 (ii)). Des axes de guidage permettent, pour chaque nouvelle expérience, de replacer le support de la feuille fragile à l'identique, si bien qu'un réglage systématique de l'alignement avec le banc de translation est inutile.

2.2 Matériaux utilisés

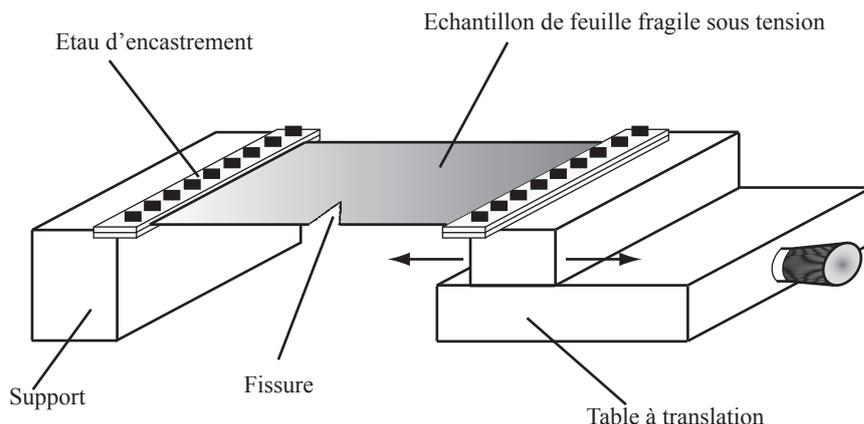
Pour réaliser cette expérience, nous avons eu recours à deux matériaux différents : du papier aluminium et du papier soie. Il est utile ici de discuter du terme *fragile* employé pour décrire de tels matériaux. En effet, quiconque a manipulé une feuille de papier a constaté qu'en la pliant on pouvait la modeler à volonté, jusqu'à la rouler en boule sans trop d'effort. Il semblerait donc que le papier ait un comportement purement plastique. Toutefois, si on étire suffisamment une bande de papier, elle rompt sans déformation plastique, excepté au voisinage immédiat de la fissure. Ainsi, on peut dire qu'une feuille de papier possède un comportement ductile vis à vis des déformations transverses (pliage) et un comportement fragile vis à vis des déformations dans son plan (étirement). Il en va de même pour une feuille de papier soie ou de papier aluminium. C'est donc eu égard aux déformations dans le plan que nous qualifions de *fragile* une feuille de papier. Nous avons également testé d'autres matériaux, tels des films en polypropylène OPP (comparables à ceux utilisés dans les expériences de B.Audoly & al [38]), mais sans succès. En général, ces matériaux présentent des déformations plastiques trop importantes avant de rompre.

Soit h l'épaisseur, E le module d'Young, Γ l'énergie d'avancée de fissure par unité de surface, ρ la masse volumique, ϵ_c la déformation critique de rupture et ϵ^* la déformation critique pour faire avancer une fissure déjà existante. Le tableau 2.2 montre les propriétés mesurées expérimentalement pour chaque matériau utilisé. L'épaisseur est obtenue à l'aide d'un comparateur micrométrique utilisé pour mesurer simultanément l'épaisseur de plusieurs échantillons superposés. La masse volumique est mesurée à l'aide d'une balance de précision et le module d'Young est mesuré par des tests de vibration ou de déflexion statique.

	h (μm)	E (GPa)	Γ (kJ.m^{-2})	ρ (kg.m^{-3})	ϵ_c	ϵ^*
Papier aluminium	20	66	3445	2333	0.037	0.007
Papier soie	27.5	2.43	72	800	0.017	0.003

TAB. 5.1 – Propriétés des matériaux utilisés

L'énergie de surface Γ est définie comme l'énergie d'avancée d'une fissure par unité de surface. Afin de pouvoir appliquer le critère de Griffith [2], il est impératif que ce terme tienne compte de tous les effets impliqués dans l'avancée de la fissure, qu'il s'agisse de la rupture des liaisons atomiques, de phénomènes de dissipation, des


 FIG. 5.3 – Schéma du dispositif utilisé pour la mesure de l'énergie de surface Γ

déformations plastiques au voisinage de la fissure, etc... L'étude présentée ici, n'a pour but ni le calcul de cette énergie de surface, ni l'inventaire des diverses contributions à cette énergie. Toutefois, on peut penser que sa valeur est liée à la manière dont est sollicité le matériau. Ainsi, il est nécessaire de mesurer cette énergie dans des conditions qui se rapprochent au maximum de l'expérience.

La figure 5.3 montre le dispositif utilisé pour mesurer l'énergie de surface Γ . Une bande du matériau étudié a ses bords encastres dans deux couples de tiges en acier faisant office d'étaux. L'un de ces étaux est fixé au plan de travail, tandis que le second est solidaire d'un banc à translation à pas micrométrique. Ainsi, ce dispositif permet de contrôler le déplacement imposé à l'échantillon. Une pré-fissure est pratiquée au cutter sur un bord de la feuille. La méthode consiste à mesurer la longueur parcourue par la fissure en fonction du déplacement. Lors de la mesure de Γ , c'est la tension orthogonale à la fissure et comprise dans le même plan qui est responsable de l'ouverture de la fissure. L'énergie de surface est donc mesurée dans des conditions de chargement de la fissure qui s'apparentent au mode d'ouverture de type mode I. Dans l'expérience de perforation de la feuille fragile par le cône, des fissures radiales apparaissent sous l'effet de la tension azimutale imposée par la présence du cône au diamètre intérieur de la feuille, ce qui s'apparente également au mode I. Toutefois, dans l'expérience, les forces imposées aux pointes de fissures ne sont pas orthogonales au plan de symétrie de ces dernières. Ceci résulte en un chargement bi-axial des fissures, discuté en détails dans la partie 5.1. Par conséquent, notre méthode de mesure de Γ est de nature à introduire un certain écart avec ce mode d'ouverture singulier. Néanmoins, elle s'approche suffisamment des conditions de l'expérience pour fournir un ordre de grandeur satisfaisant de l'énergie de surface.

Ainsi, la valeur de l'énergie de surface est déduite des mesures en appliquant le critère de Griffith [2] (voir la partie 4.2) :

$$\Delta U_e = -\Delta U_s = -\Gamma h \Delta l \quad (5.1)$$

où U_e est l'énergie élastique, U_s l'énergie de création de fissure et l la longueur de la fissure. Le critère de Griffith est basé sur le concept de conservation de l'énergie du système, si bien qu'en négligeant toute autre contribution énergétique que celles

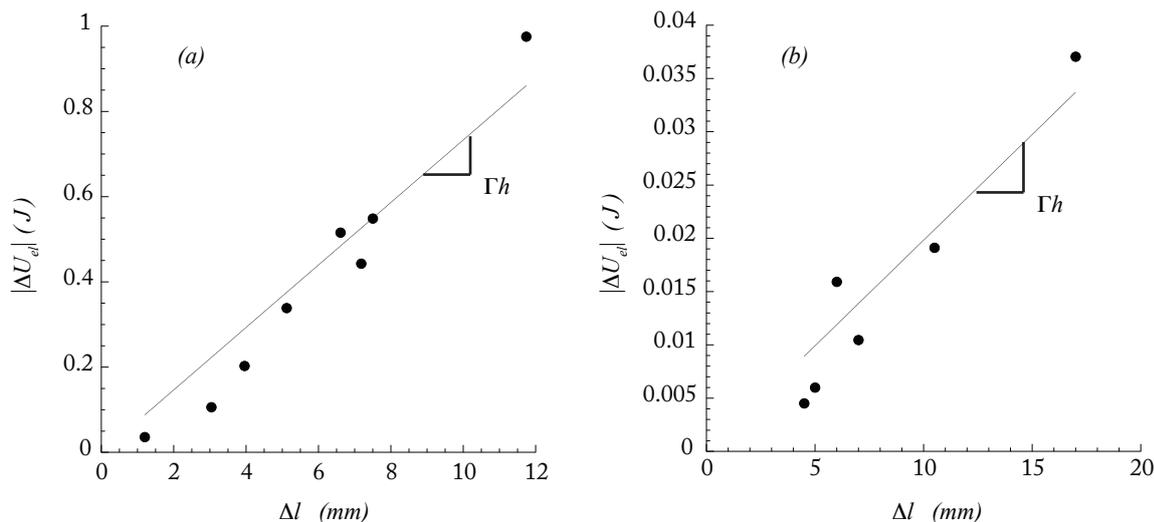


FIG. 5.4 – Variation de l'énergie élastique en fonction de la variation de longueur de la fissure : (a) pour le papier aluminium, (b) pour le papier soie. Les points représentent les mesures et les droites en trait plein les fits par régression linéaire.

émanant de l'élasticité de la feuille et de la création de surface, toute variation d'énergie de création de fissure est compensée par la variation de l'énergie élastique. Ainsi, la formule 5.1 suggère que la variation d'énergie élastique est une fonction linéaire de la variation de longueur de la fissure, le facteur de proportionnalité étant égal à Γh . L'énergie élastique est calculée de la manière suivante :

$$U_e = \frac{EhS}{2(1-\nu^2)}\epsilon^2 \quad (5.2)$$

où ϵ est la déformation, considérée en première approximation comme uniforme dans tout l'échantillon, ν le module de Poisson et S la surface de la feuille sous tension, c'est à dire, en première approximation, la région rectangulaire comprise entre le bord libre de la feuille et la pointe de fissure.

La figure 5.4 montre les mesures dont sont déduites les valeurs de l'énergie de surface pour les différents matériaux. Les valeurs de Γ sont reportées dans le tableau 2.2. On observe que les valeurs mesurées sont grandes devant l'ordre de grandeur des énergies de surface trouvées dans la littérature (20 kJ.m^{-2} pour l'aluminium par exemple). Ceci s'explique avant tout par le fait que nous ne tenons pas compte des concentrations de contraintes au voisinage de la pointe de fissure lors du calcul de Γ . Enfin, les mesures des déformations critiques ϵ_c et ϵ^* sont réalisées à l'aide du dispositif servant à la mesure de l'énergie de surface : l'échantillon est étiré jusqu'à apparition d'une fissure, dans le cas de ϵ_c , ou jusqu'à l'avancée de la fissure, dans le cas de ϵ^* .

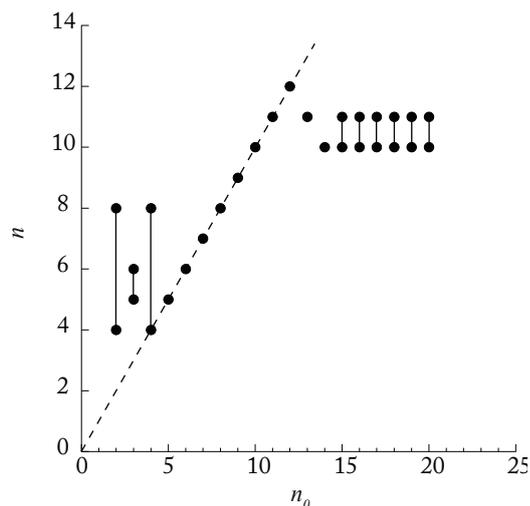


FIG. 5.5 – Evolution du nombre de pétales sélectionné n avec le nombre initial de fissures n_0 pour une feuille de papier aluminium comportant des fissures initiales d'un rayon de $5mm$. Les ronds noirs reliés par un trait montrent les valeurs extrémales de n observées pour un n_0 donné. La ligne en pointillés montre la courbe $n = n_0$.

3 Phénoménologie

Considérons le cas d'une feuille annulaire dont le bord extérieur est encastré. On introduit la pointe d'un cône rigide, considéré comme indéformable, au centre de la feuille, et on l'avance jusqu'à ce qu'il arrive au contact du bord intérieur de la feuille. Dans un premier temps, lorsqu'on fait avancer le cône, la feuille se fléchit avec le bord intérieur en appui simple sur le cône. Puis rapidement, les forces de tension consécutives à ce fléchissement deviennent supérieures aux forces de frottement au contact du cône. Par conséquent, si le cône est poussé davantage, ce dernier commence alors à glisser sur le bord intérieur de la feuille et à perforer cette dernière. Pendant la pénétration du cône, le rayon imposé au bord intérieur augmente et à son voisinage, la feuille se trouve étirée dans la direction orthoradiale. Si la pénétration est suffisante, la déformation au bord intérieur est telle que, localement, la contrainte critique de rupture du matériau est atteinte. Des amorces de fissures apparaissent alors sur la circonférence du bord intérieur. Dès lors, si on fait pénétrer plus profondément le cône dans la feuille, la propagation des fissures présente une phénoménologie riche. Si l'expérience aboutit généralement à l'obtention d'un motif de brisure en forme de pétales équitablement répartis, divers phénomènes transitoires sont observés. Cela a pour effet l'obtention d'une dispersion sur les résultats expérimentaux illustrée par les figures 5.16 et 5.18 (b).

Afin de mieux comprendre les phénomènes transitoires responsables de la dispersion sur le nombre de fissures sélectionné, nous avons également mené des expériences en imposant un nombre initial de fissures n_0 . Dans cette situation précise, lorsque le cône est engagé au centre de la feuille, il commence par simplement repousser les pétales préexistants sans effet sur le réseau de fissures initiales. Lorsque le cône parvient au voisinage des pointes des fissures initiales, la feuille fragile se retrouve

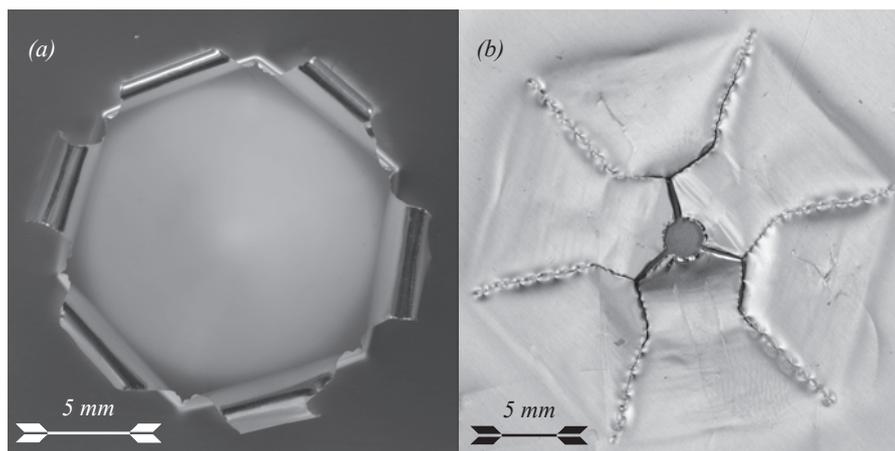


FIG. 5.6 – (a) motif final de l'expérience présentée à la figure 5.7 obtenu pour un rayon de pénétration de 18 mm. (b) Trajectoires des fissures lors de l'expérience de la figure 5.7.

contrainte au niveau de son bord intérieur. Par conséquent, les fissures préexistantes peuvent avancer. En fonction de leur nombre n_0 , des réarrangements du motifs sont observés.

3.1 Perforation de feuilles fragiles avec n_0 pré-fissures

En imposant le nombre initial de fissures n_0 , nous pouvons observer l'évolution du motif de rupture avec tout type de conditions initiales en terme d'amorces de fissures. Néanmoins, dans cette étude nous nous limitons aux cas pour lesquels les fissures initiales sont réparties de manière le plus uniforme possible, c'est à dire situées suivant les sommets d'un polygone régulier. Les pré-fissures sont réalisées grâce à un plateau diviseur d'atelier avec une précision de quelques minutes d'angle.

La figure 5.5 montre le nombre de pétales sélectionné n en fonction du nombre initial de fissures n_0 pour une feuille de papier aluminium, les fissures initiales s'étendant à un rayon $R_0 = 5$ mm. On observe que pour $5 \leq n_0 \leq 12$, le nombre de pétales sélectionné demeure identique au nombre initial, $n = n_0$. En revanche, pour $n_0 < 5$, on obtient un nombre final supérieur au nombre initial, $n \geq n_0$, avec une dispersion sur les résultats expérimentaux, avec $4 \leq n \leq 8$. Par ailleurs, pour $n_0 > 12$, le nombre final n obtenu est inférieur au nombre initial, $n < n_0$, avec une dispersion assez faible sur les résultats expérimentaux, avec $10 \leq n \leq 11$. Nous présentons dans la suite des illustrations des expériences qui couvrent ces différents cas.

Cas d'une feuille avec $n_0 = 3$ pré-fissures

La figure 5.7 montre une expérience conduite avec une feuille de papier aluminium comportant un nombre initial de fissures $n_0 = 3$ et qui aboutit à un nombre final $n = 6$. On observe dans ce cas, que l'apparition de nouveaux pétales ne s'opère pas par la création de nouvelles amorces de fissures. En effet, on observe plutôt une instabilité des pointes de fissures (voir vignette (d)) qui résulte en un branchement

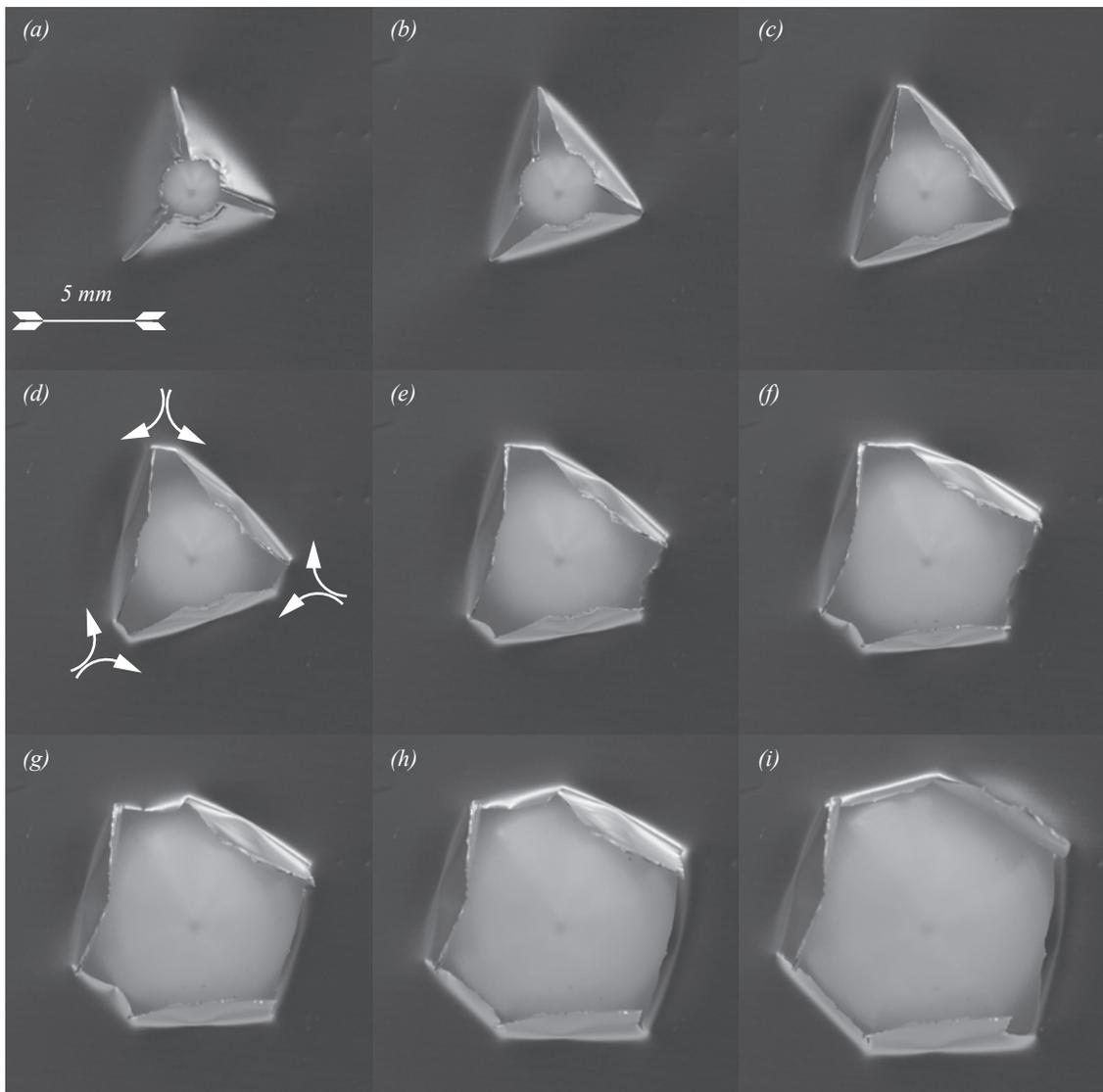


FIG. 5.7 – Exemple de perforation d'une feuille de papier aluminium comportant trois fissures initiales centrées de rayon 5 mm, aboutissant à la formation de $n = 6$ pétales. Le rayon de pénétration du cône varie par pas de 0.8 mm d'une image à l'autre. (a) à (c) La feuille se déforme au contact du cône lors de la perforation. Toutefois, la contrainte critique n'est pas atteinte et il n'y a pas de création de nouvelles fissures. (d) A partir d'un certain rayon de pénétration, les trois fissures deviennent instables et se branchent, donnant naissance à trois nouveaux pétales, ceci étant symbolisé par les double flèches. (e) à (i) A mesure que le cône perce la feuille, les six fissures se propagent et s'organisent en tendant vers l'uniformisation du motif à six pétales.

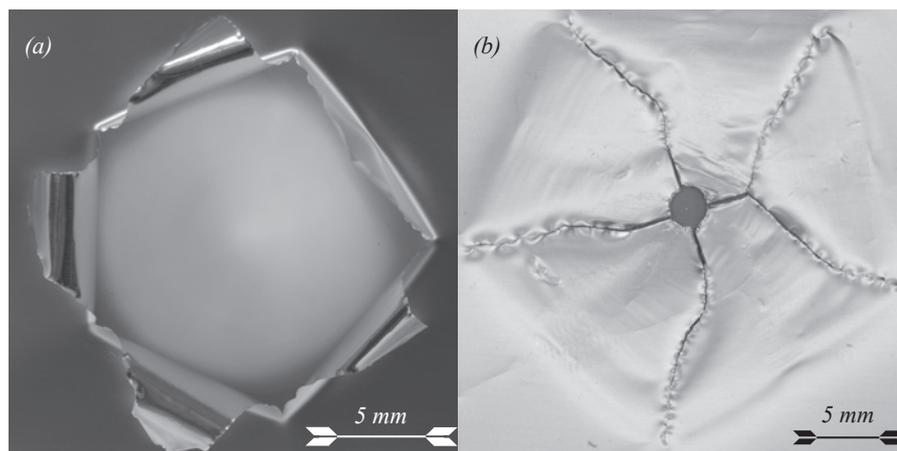


FIG. 5.8 – (a) motif final de l'expérience présentée à la figure 5.9 obtenu pour un rayon de pénétration de 17.6 mm. (b) Trajectoires des fissures lors de l'expérience de la figure 5.9.

de chacune des fissures initiales très bien visible sur la figure 5.6 (b). Ainsi, chaque pétale se divise en deux pour donner un nombre final $n = 6$ qui, lui, est stable (voir figure 5.5). Le cas ici illustré aboutit au nombre final $n = 6$, mais d'autres expériences ont conduit à un nombre final $n = 5$. Par ailleurs, il est intéressant de remarquer qu'une fois le nombre final de fissures atteint, l'évolution de ces dernières tend vers l'uniformisation du motif de rupture, comme le suggère la figure 5.6 (a). Une fois les pétales uniformément répartis, la propagation des fissures devient radiale.

Cas d'une feuille avec $n_0 = 4$ pré-fissures

Tout comme le cas précédemment abordé, le cas à $n_0 = 4$ fissures initiales présente une instabilité des pointes de fissures qui résulte en des branchements. Par exemple, les figures 5.9 et 5.10 montrent comment le nombre de fissures évolue de $n_0 = 4$ à $n = 5$ et $n = 6$ respectivement. Ces branchements de fissures sont clairement visibles sur les figures 5.8 (b) et 5.11 (b). D'autres expériences ont prouvé que chacune des quatre fissures initiales peuvent être sujettes à cette instabilité. Ainsi, $n_0 = 4$ peut aussi conduire à des nombres de pétales finaux $n = 7$ et $n = 8$. De la même manière que pour le cas $n_0 = 3$, une fois le nombre de pétales final atteint, le système évolue vers l'uniformisation du motif (cf 5.8 (a) et 5.11 (a)). Par ailleurs, un phénomène singulier est observé pour le cas à $n = 4$ pétales avec le papier aluminium. En effet, quelques expériences ont montré que le nombre de fissures initial $n_0 = 4$ peut être conservé. Dans ce cas précis, les quatre fissures se propagent en effectuant un trajet en spirale. La figure 5.12 montre le relevé de la trajectoire des fissures dans cette situation. Ce suivi des têtes de fissures a été obtenu par analyse d'image. On observe que les fissures se propagent avec un angle par rapport à la direction radiale, cet angle étant le même pour chacune d'elles. En particulier, on peut remarquer que le trajet des fissures devient instable à partir d'un certain rayon critique de l'ordre de 20 mm, alors que dans les cas de branchements le rayon critique est inférieur à 5 mm.

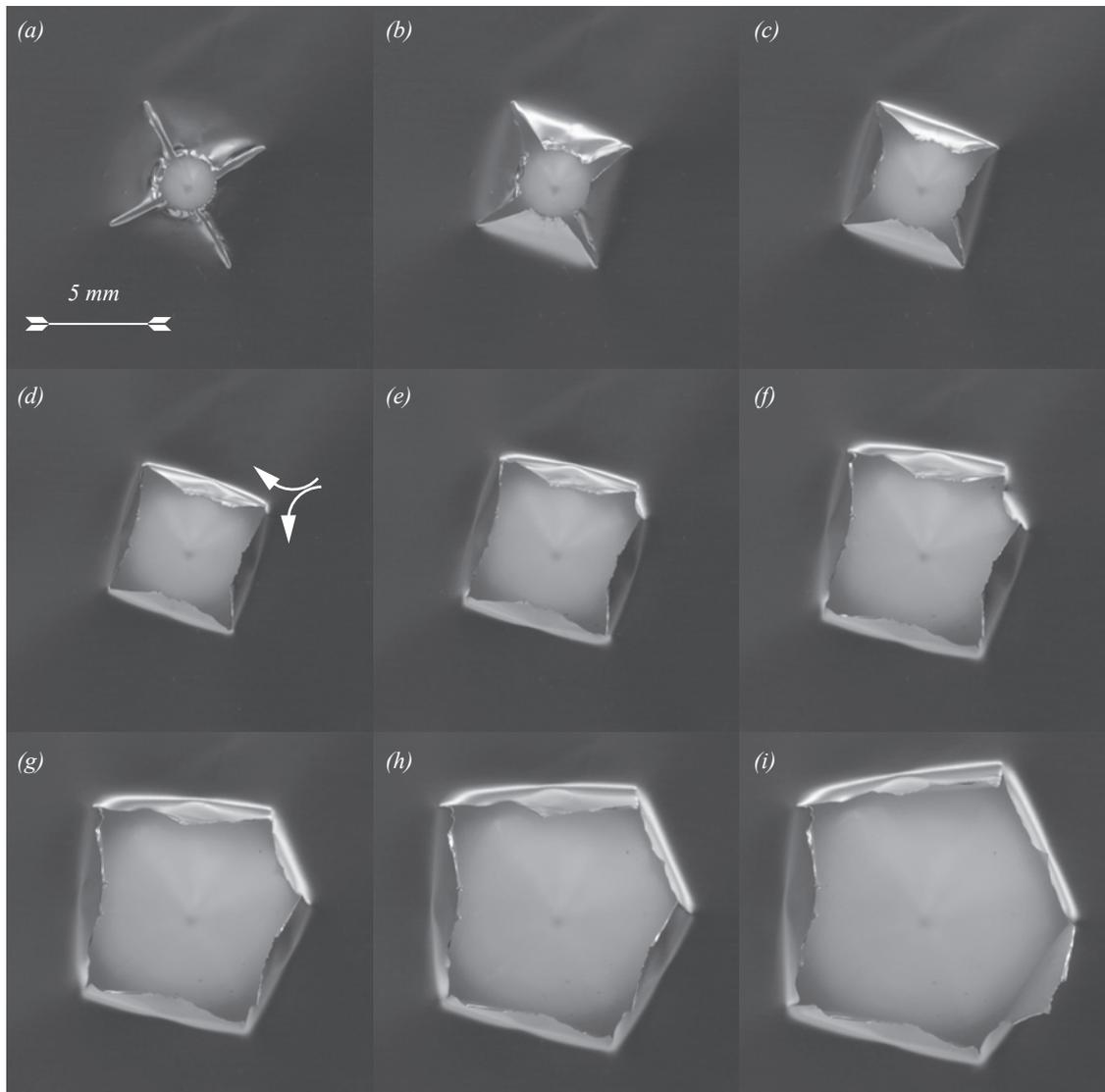


FIG. 5.9 – Exemple de perforation d'une feuille de papier aluminium comportant quatre fissures initiales centrées de rayon 5 mm, aboutissant à la formation de $n = 5$ pétales. Le rayon de pénétration du cône varie par pas de 0.8 mm d'une image à l'autre. (a) à (c) La feuille se déforme au contact du cône lors de la perforation. Toutefois, la contrainte critique n'est pas atteinte et il n'y a pas de création de nouvelles fissures. (d) A partir d'un certain rayon de pénétration, une fissure devient instable et se branche, donnant naissance à un nouveau pétale, ceci étant symbolisé par la double flèche. (e) à (i) A mesure que le cône perce la feuille, les cinq fissures se propagent et s'organisent en tendant vers l'uniformisation du motif à cinq pétales.

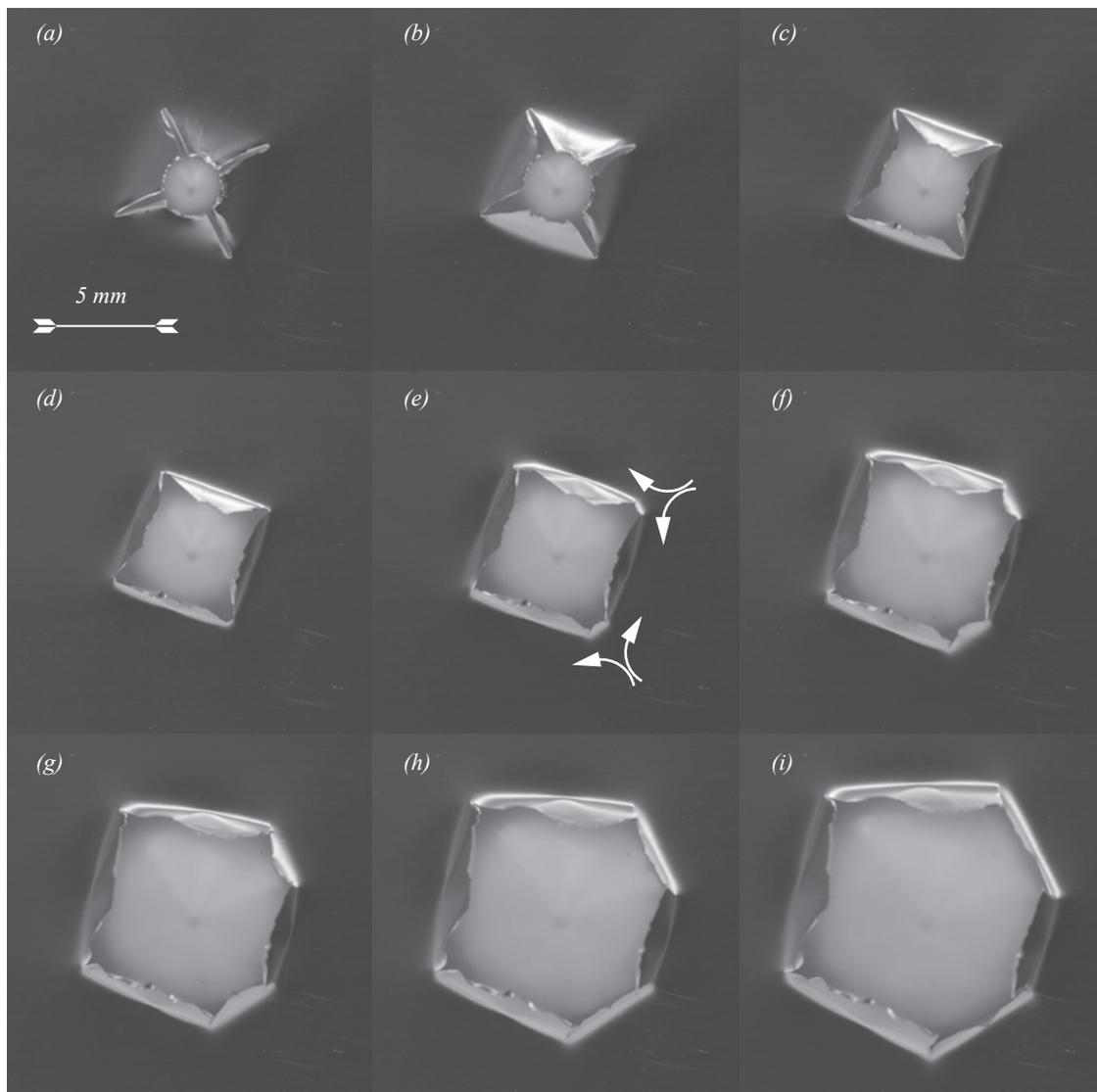


FIG. 5.10 – Exemple de perforation d'une feuille de papier aluminium comportant quatre fissures initiales centrées de rayon 5 mm, aboutissant à la formation de $n = 6$ pétales. Le rayon de pénétration du cône varie par pas de 0.8 mm d'une image à l'autre. (a) à (d) La feuille se déforme au contact du cône lors de la perforation. Toutefois, la contrainte critique n'est pas atteinte et il n'y a pas de création de nouvelles fissures. (e) A partir d'un certain rayon de pénétration, deux fissures deviennent instables et se branchent, donnant naissance à deux nouveaux pétales, ceci étant symbolisé par les double flèches. (f) à (i) A mesure que le cône perce la feuille, les six fissures se propagent et s'organisent en tendant vers l'uniformisation du motif à six pétales.

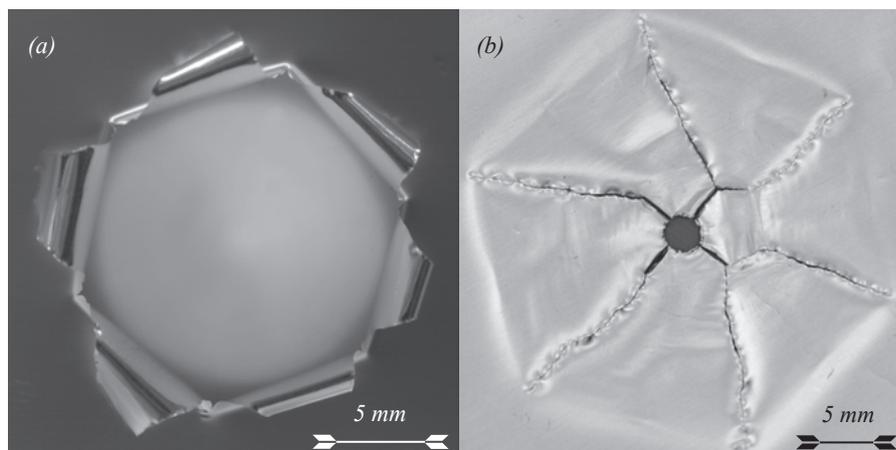


FIG. 5.11 – (a) motif final de l'expérience présentée à la figure 5.10 obtenu pour un rayon de pénétration de 18 mm. (b) Trajectoires des fissures lors de l'expérience de la figure 5.10.

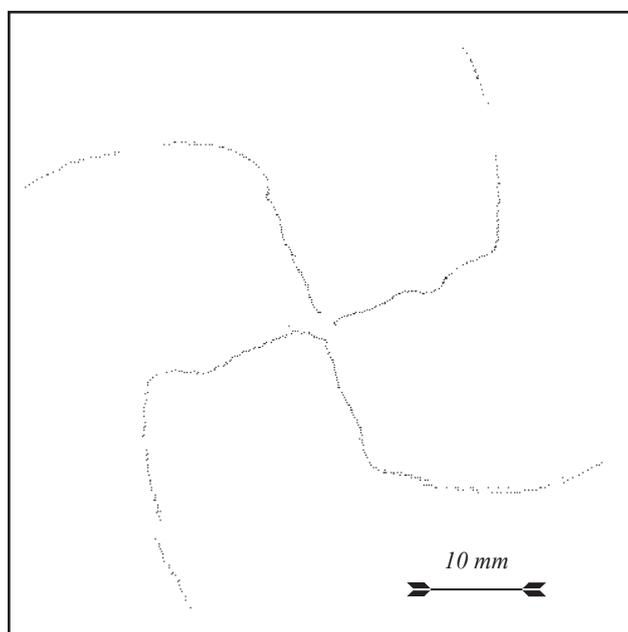


FIG. 5.12 – Relevé des trajectoires des fissures pour le cas singulier de 4 fissures dans une feuille de papier aluminium.

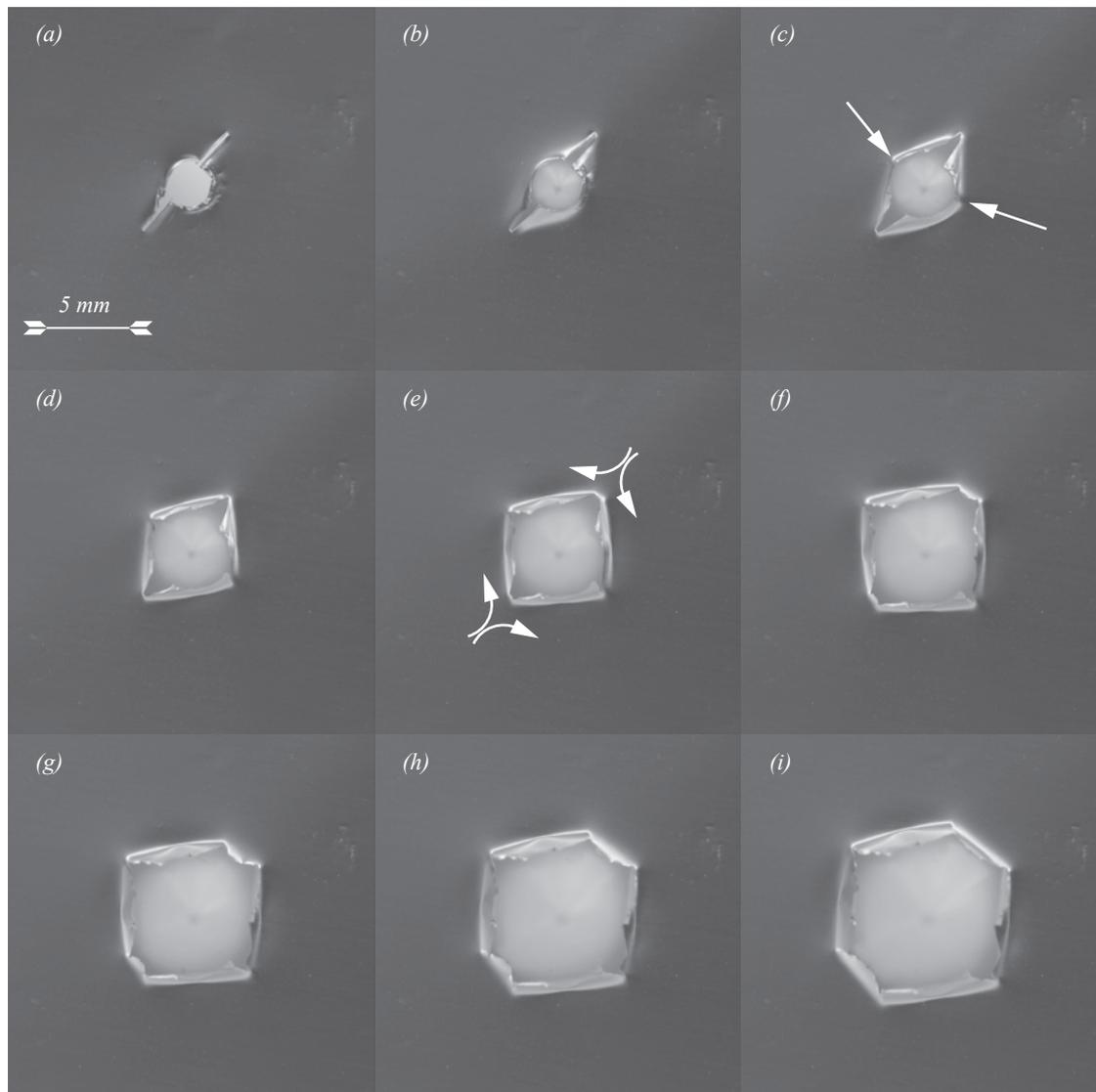


FIG. 5.13 – Exemple de perforation d'une feuille de papier aluminium comportant deux fissures initiales centrées de rayon 5 mm, aboutissant à la formation de $n = 6$ pétales. Le rayon de pénétration du cône varie par pas de 0.6 mm d'une image à l'autre. (a) Feuille initialement au repos avec la pointe du cône simplement engagée dans le trou central. (b) A mesure que le cône pénètre dans la feuille, celle-ci se déforme. (c) De part et d'autre des deux fissures initiales la contrainte de rupture du matériau est atteinte. Deux nouvelles fissures apparaissent, indiquées par les flèches. (d) La feuille continue de se déformer jusqu'à ce que deux fissures deviennent instables et se branchent pour donner naissance à deux nouveaux pétales en (e), ce qui est symbolisé par les double flèches. (f) à (i) A mesure que le cône perce la feuille, les six fissures se propagent de manière radiale.

Cas d'une feuille avec $n_0 = 2$ pré-fissures

La figure 5.13 montre un exemple de perforation d'une feuille de papier aluminium comportant initialement $n_0 = 2$ pré-fissures. Qualitativement, ce cas diffère des cas $n_0 = 3$ et $n_0 = 4$ dans la mesure où on peut remarquer la création de nouvelles amorces de fissures. En effet, lors de la pénétration du cône à travers le motif à deux fissures diamétralement opposées, la déformation entre les deux pointes de fissure devient telle que la contrainte de rupture est dépassée. Ainsi, sur la vignette (c) de la figure 5.13, on note l'apparition de deux nouvelles fissures par dépassement de la contrainte critique du matériau. Nous sommes alors ramenés au cas $n_0 = 4$ et on observe sur la vignette (e) les branchements de deux fissures qui donnent naissance à deux nouveaux pétales. Finalement, on obtient un nombre de $n = 6$ pétales. Cette expérience illustre bien le fait que le cas $n_0 = 2$ fissures initiales se rapporte aux cas $n_0 = 3$ et $n_0 = 4$ par création de nouvelles amorces de fissures.

Cas d'une feuille avec $n_0 = 6$ pré-fissures

La figure 5.14 montre la perforation d'une feuille de papier aluminium qui comporte $n_0 = 6$ pré-fissures. Ce cas est représentatif de la phénoménologie des cas $5 \leq n_0 \leq 12$ pour lesquels le motif reste stable. En effet, les fissures se propagent de manière radiale et le nombre initial de pétales est conservé.

Cas d'une feuille avec $n_0 = 20$ pré-fissures

Nous avons vu qu'un nombre initial de fissures $n_0 > 12$ conduit à un nombre final de fissures $n < n_0$. L'expérience de la figure 5.15 illustre bien ce comportement. En effet, lors de cet essai, on perfore une feuille de papier aluminium comportant $n_0 = 20$ pré-fissures, ce qui aboutit au nombre final de $n = 10$ pétales. Sur la vignette (vi), on observe clairement que des groupes de pétales se forment pour créer des pétales plus gros, de sorte que certaines fissures ne peuvent se propager plus loin. Ce cas est représentatif des expériences conduites avec $n_0 > 12$.

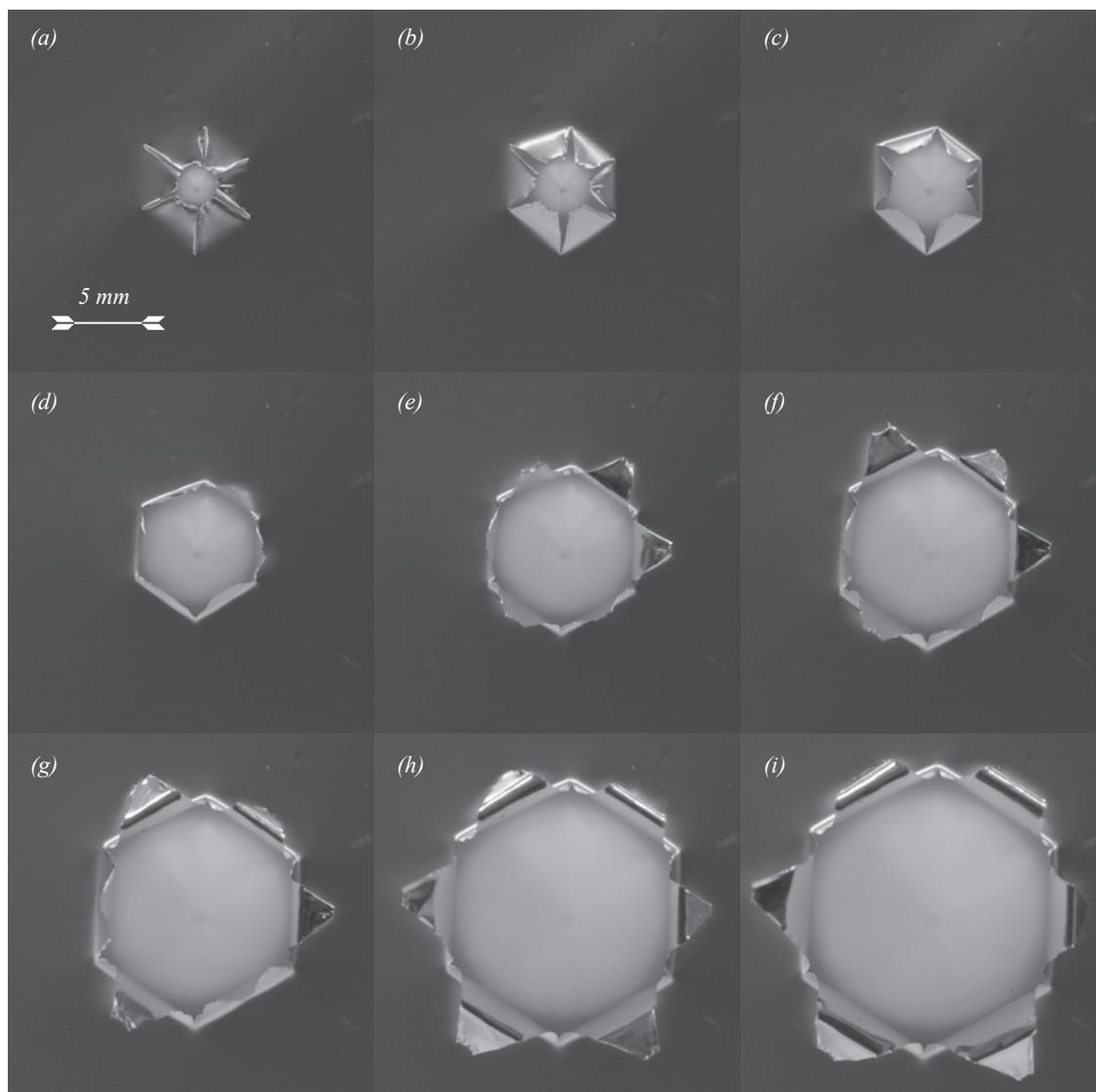


FIG. 5.14 – Exemple de perforation d'une feuille de papier aluminium comportant six fissures initiales centrées de rayon 5 mm, aboutissant à la formation de $n = 6$ pétales. Le rayon de pénétration du cône varie par pas de 1.2 mm d'une image à l'autre. (a) à (i) Lors de la pénétration du cône dans la feuille, les six fissures demeurent stables et se propagent de manière radiale.

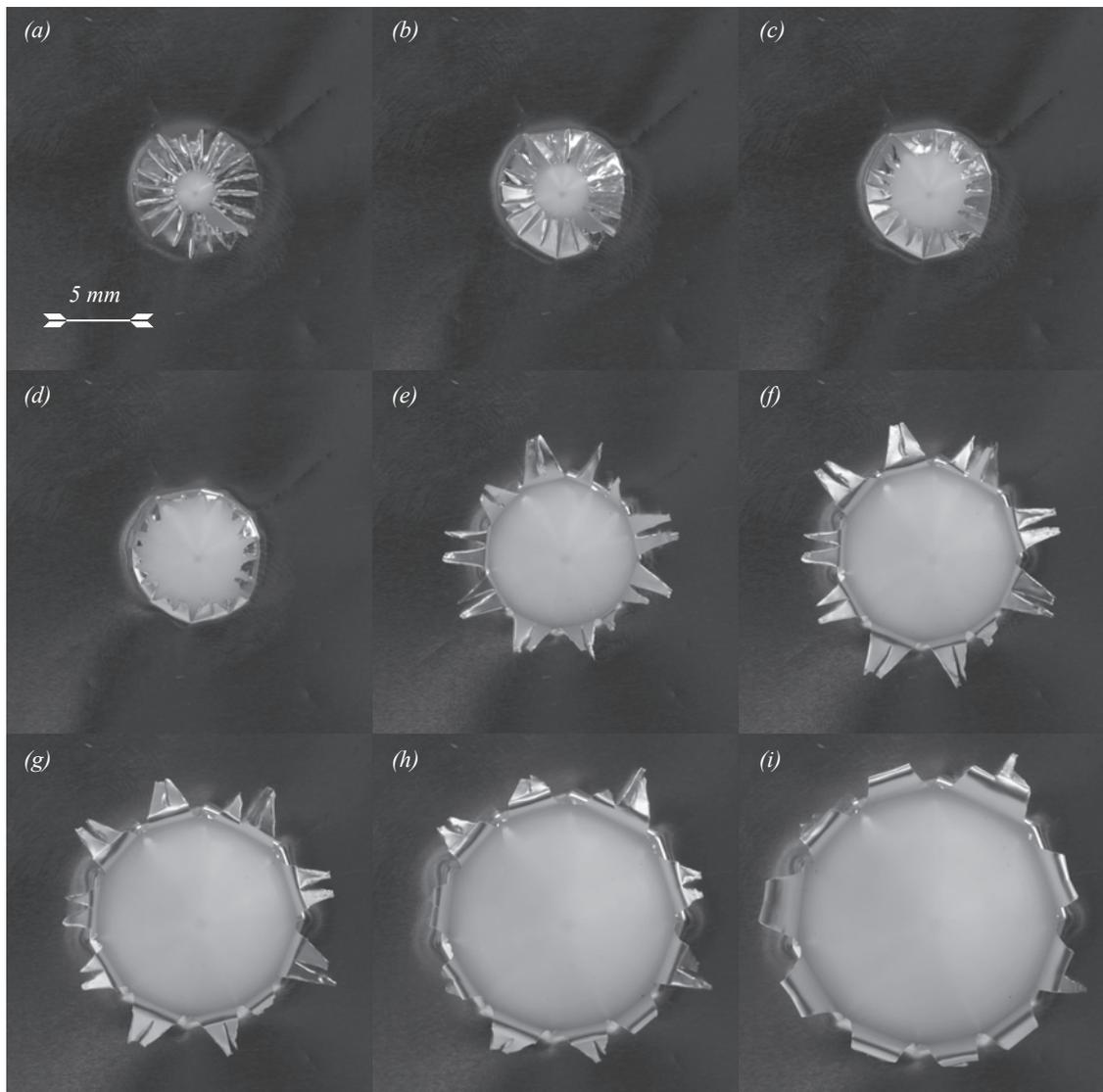


FIG. 5.15 – Exemple de perforation d'une feuille de papier aluminium comportant vingt fissures initiales centrées de rayon 5 mm, aboutissant à la formation de $n = 10$ pétales. Le rayon de pénétration du cône varie par pas de 1.2 mm d'une image à l'autre. (a) à (e) La feuille se déforme lors de la perforation. Les pétales initiaux se replient sur eux même au contact du cône. (f) Lorsque le rayon de pénétration du cône devient supérieur au rayon initial des fissures, on observe la sélection d'un nombre de fissures plus faible que le nombre initial : des groupes de pétales se forment empêchant la propagation de certaines fissures. (g) à (i) Un nombre de dix pétales est sélectionné et conservé jusqu'à la fin de l'expérience.

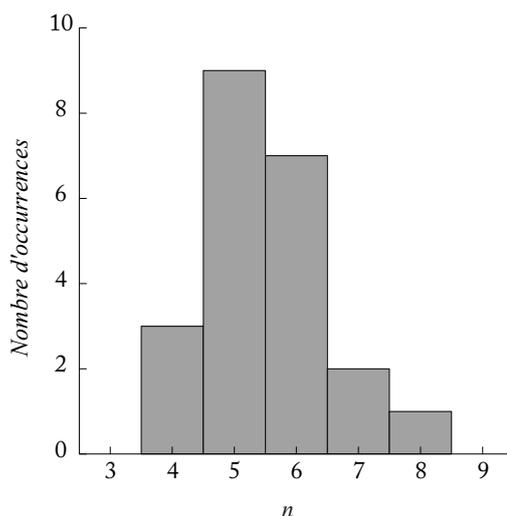


FIG. 5.16 – Histogramme du nombre de pétales obtenus lors de perforations de feuilles de papier aluminium comportant un trou initial centré de diamètre 3 mm. Le rayon de pénétration est de 45 mm.

3.2 Perforation de feuilles fragiles sans pré-fissures

Nous venons de voir que le nombre de fissures se formant lors de la perforation d'une feuille fragile peut varier suivant le nombre initial d'amorces de fissures. Lors de la perforation d'une feuille qui ne comporte pas de pré-fissures, une combinaison des cas évoqués précédemment peut se présenter. En effet, l'apparition des fissures sur le bord intérieur de la feuille a tendance à se produire de manière séquentielle : un premier fissure est suivi d'une nouvelle amorce de fissure diamétralement opposée, ce qui nous ramène au cas $n_0 = 2$ qui, lui même, a toute les chances de conduire au cas $n_0 = 4$. De plus, certains fissures peuvent ne pas apparaître suivant des positions diamétralement opposées : c'est le cas lorsque des amorces de fissures se créent sur des défauts. Par conséquent on peut être ramené à des cas voisins du cas $n_0 = 3$ déjà décrit, ou bien même, il se peut que deux fissures se forment séparés d'une faible distance, si bien que localement on est ramené à un cas $n_0 > 12$. Ainsi, les résultats expérimentaux de la figure 5.16 reflètent cette phénoménologie.

A titre d'exemple, la figure 5.17 montre une expérience conduite avec une feuille d'aluminium sans pré-fissures. Sur la vignette (b), on remarque l'apparition de six amorces de fissures dont trois sont très proches (autour du fissure repéré par une flèche en pointillés). Ainsi, localement, l'écart angulaire entre chaque pointe de fissure est petit, de telle sorte que la configuration est équivalente à ce que l'on obtiendrait avec un grand nombre de pétales. Les deux pétales délimités par ces fissures se regroupent alors pour ne former plus qu'un et le fissure repéré par la flèche en pointillés ne se propage pas plus loin. Le motif à cinq pétales obtenu est stable et les fissures restantes se propagent de manière radiale lors de la pénétration du cône. Sur la vignette (i), le cercle met en évidence l'extrémité d'un pétale sur lequel on peut observer la fissure qui n'a pas été propagée.

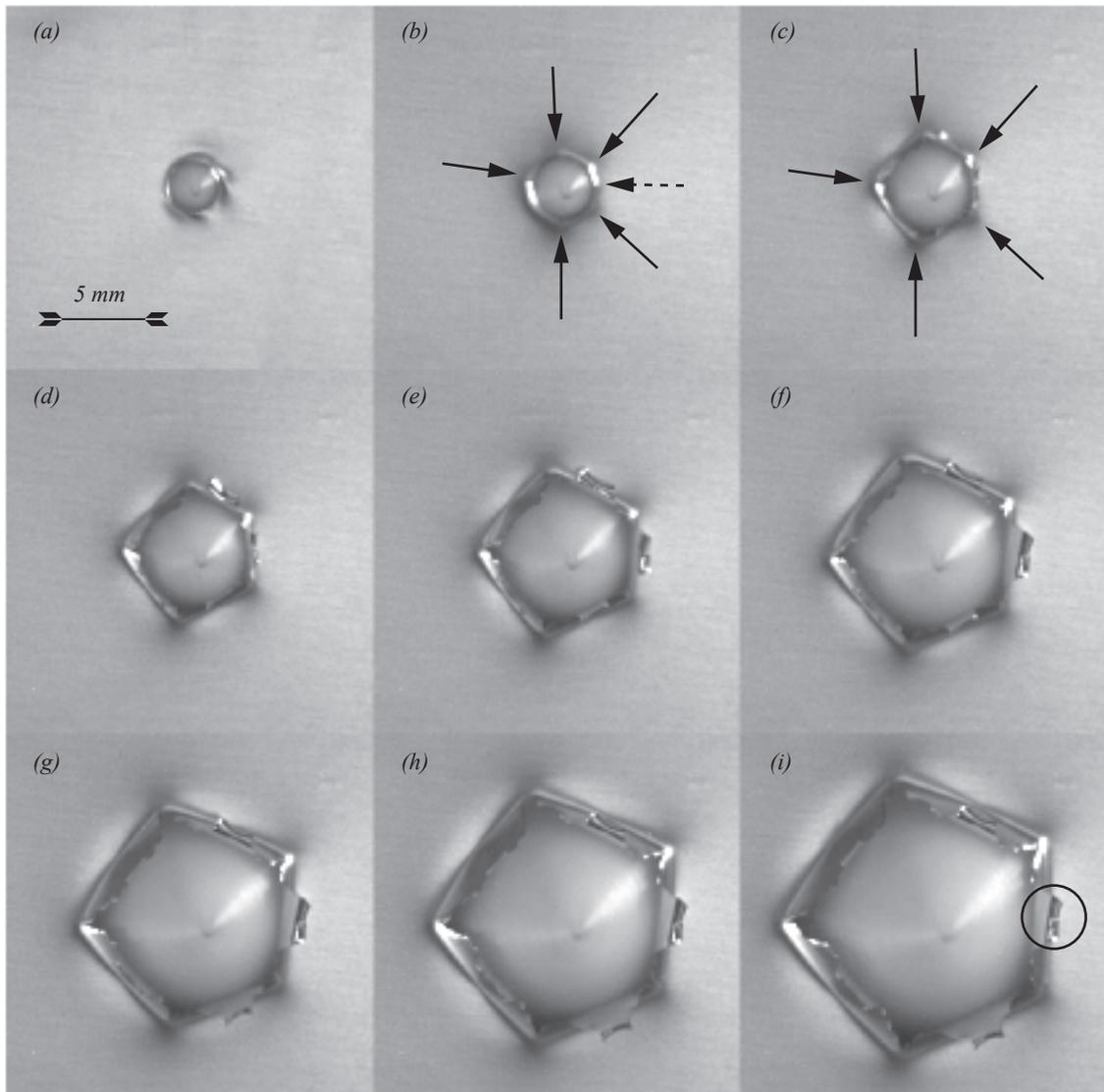


FIG. 5.17 – Exemple de perforation d'une feuille de papier aluminium comportant un trou initial centré de diamètre 3 mm, aboutissant à la formation de $n = 5$ pétales. Le rayon de pénétration du cône varie par pas de 1 mm d'une image à l'autre. (a) Feuille initialement au repos avec la pointe du cône simplement engagée dans le trou central. (b) La contrainte sur le bord intérieur de la feuille a dépassé la contrainte de rupture du matériau et on observe l'apparition de fissures. Les flèches montrent l'emplacement des fissures, la flèche en pointillés indique une fissure qui ne sera pas propagée plus loin. (c) On observe que seules cinq fissures sur les six présentes auparavant continuent de se propager. (d) à (i) Les fissures se propagent de manière radiale au fur et à mesure que le cône perce la feuille, conservant ainsi le motif à cinq pétales. En (i), le cercle montre l'extrémité d'un pétale sur lequel on peut voir l'amorce de fissure qui ne s'est pas propagée.

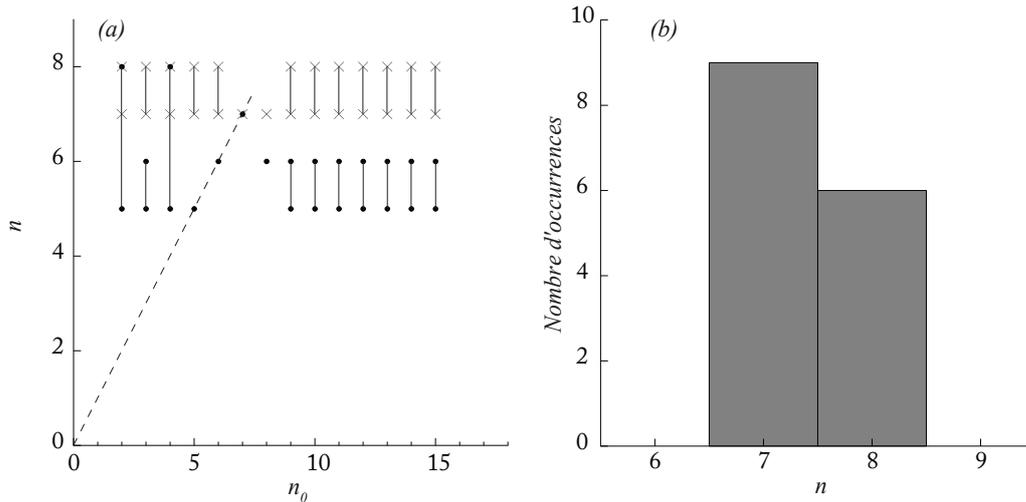


FIG. 5.18 – (a) Evolution du nombre de pétales sélectionné n avec le nombre initial de fissures n_0 pour une feuille de papier soie comportant des fissures initiales d'un rayon de 5mm . Les points expérimentaux reliés par un trait montrent les valeurs extrémales de n observées pour un n_0 donné. Les points noirs représentent les mesures effectuées pour un rayon de pénétration de 15mm . Les croix représentent les mesures effectuées pour un rayon de pénétration de 45mm . La ligne en pointillés montre la courbe $n = n_0$. (b) Histogramme du nombre de pétales obtenus lors de perforations de feuilles de papier soie comportant un trou initial centré de diamètre 3mm . Le rayon de pénétration est de 45mm

3.3 Cas du papier soie

Dans le cas du papier soie, la phénoménologie observée est proche de celle du papier aluminium. A la différence, toutefois, que le papier soie se montre plus instable en ce qui concerne les branchements de fissures. Ainsi, à partir de rayons de pénétration de l'ordre de 20mm , les motifs à $n = 5$ et à $n = 6$ pétales peuvent présenter des branchements. La figure 5.18 montre les résultats expérimentaux obtenus avec le papier soie. Les expériences avec un nombre de fissures n_0 imposé donnent des résultats différents en fonction du rayon de pénétration (cf figure 5.18 (a)). Nous présentons les résultats pour un rayon de pénétration de 15mm afin de montrer que la phénoménologie est comparable à celle du papier aluminium. Néanmoins, à cause de la plus grande instabilité du papier soie eu égard aux branchements de fissures, pour un rayon de pénétration de 45mm , on mesure un nombre de fissures final systématiquement égal à $n = 7$ ou $n = 8$, d'où la distribution du nombre de pétales pour une feuille de papier soie sans pré-fissures (cf figure 5.18 (b)). Par ailleurs, si on part d'un grand nombre de pré-fissures, les mesures montrent clairement la diminution significative du nombre de pétales, déjà observée dans le cas du papier aluminium.

4 Théorie

Le but de l'étude est la prédiction du nombre de fissures final observé en fonction des propriétés du matériau. La propagation de ces fissures est couplée aux déformations imposées par le passage du cône à travers la feuille fragile. Dans le but de prédire l'aspect des motifs de rupture en pétales observés dans les expériences, nous proposons un modèle simple, fondés sur une description géométrique de la zone de contact entre le cône et le matériau perforé. Par la suite, nous exposons un raisonnement énergétique qui montre l'existence d'un nombre de pétales optimal et, enfin, nous nous intéressons aux changements de motifs.

4.1 Déformation de la feuille au contact du cône

Nous considérons une feuille fragile perforée par un cône. Au cours d'un tel traitement, la feuille se déchire en plusieurs pétales qui se replient sur eux même au passage du cône et grandissent au fur et à mesure que les déchirures avancent vers le bord extérieur de la feuille. A la base des pétales, soit dans le plan de la feuille, le cône impose un étirement orthoradial du bord intérieur. Ainsi, la feuille fragile est sujette à de grands déplacements hors du plan (pétales) ainsi qu'à un étirement dans son plan (contact avec le cône). Les déformations des feuilles minces satisfont des systèmes d'équations non linéaires telles que les équations de Föppl-von Kármán (*cf* [39]) dont la résolution, dans le cas présent, s'avérerait bien compliquée. Toutefois, dans la limite des faibles épaisseurs $h/R \ll 1$ (dans nos expériences, $h/R \sim 10^{-3}$), nous pouvons découpler l'énergie de flexion et l'énergie des déformations dans le plan. De plus, dans la limite des faibles épaisseurs, nous pouvons négliger l'énergie de flexion par rapport à l'énergie due aux déformations dans le plan de la feuille. Cette approche est similaire à celle employée dans d'autres études de propagation de fissures dans des feuilles fragiles minces (B. Audoly & *al* [38]).

La région du cône intersectée par le plan de la feuille est un cercle de centre O et de rayon R . La feuille présente n fissures que nous considérons comme réparties équitablement. Ainsi, l'angle formé par deux pointes de fissures voisines et le centre O du cercle est uniforme et égal à π/n . Nous considérons de plus, que le nombre n de fissures ainsi que leur répartition angulaire sont conservés pour tout R .

La figure 5.19 montre le schéma du contact entre la feuille fragile et le cône pour un pétale délimité par deux pointes de fissures, notées F et F' . Ainsi, la ligne FF' peut être considérée comme la base du pétale comprise dans le plan de la feuille. A l'équilibre, le bord FF' est déformé au contact du cône, et cette déformation est fonction de l'angle ϕ_n , défini comme l'angle entre la tangente au cône (FB) et la droite (FF'). Ainsi, $\phi_n = 0$ correspond au cas limite pour lequel le bord FF' n'est pas déformé (ligne droite), $\phi_n = \pi/n$ correspondant au cas limite pour lequel le bord FF' a une déformation maximale (pointes de fissures au contact du cône).

Il est alors aisé d'estimer la déformation de la ligne FF' . Initialement, la ligne ABF correspond au segment CF sans déformation. De simples considérations géométriques donnent

$$CF = \frac{\sin(\pi/n)}{\cos(\pi/n - \phi_n)} R \quad (5.3)$$

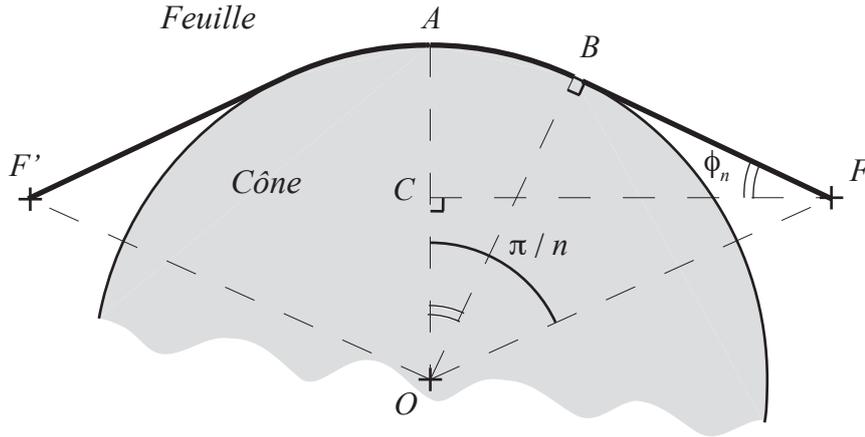


FIG. 5.19 – Schéma montrant la déformation de la feuille fragile au voisinage du cône.

Par ailleurs, on obtient la longueur de la ligne ABF :

$$ABF = AB + BF = \{\phi_n + \tan(\pi/n - \phi_n)\}R \quad (5.4)$$

On obtient alors l'allongement $\epsilon_n = (ABF - CF)/CF$, donné par la formule suivante :

$$\epsilon_n = \frac{\phi_n \cos(\pi/n - \phi_n) + \sin(\pi/n - \phi_n)}{\sin(\pi/n)} - 1 \quad (5.5)$$

qui vérifie bien $\epsilon_n = 0$ pour $\phi_n = 0$.

4.2 Géométrie du motif de brisure en pétales

Nous venons de calculer la déformation imposée par le cône sur le bord intérieur de la feuille fragile. L'amplitude de la déformation dépend bien sûr du nombre n de fissures, mais également de l'angle ϕ_n . A un angle ϕ_n donné correspondent non seulement l'amplitude de la déformation élastique, mais aussi la longueur de propagation des fissures. Ainsi, la valeur de ϕ_n est le résultat de la compétition entre la déformation élastique et la création de surface, et peut être calculée en appliquant un critère de conservation d'énergie connu sous le nom de critère de Griffith.

Champ de contrainte et énergie élastique de la feuille fragile

Précédemment, dans la partie 4.1 nous avons obtenu la déformation ϵ_n pour le bord intérieur de la feuille fragile en considérant celui-ci comme une ligne élastique. Cette approche simple revient, d'une certaine manière, à calculer la déformation moyenne ϵ_n le long du bord intérieur, ce qui représente déjà une approximation. Nous ne souhaitons pas nous engager dans le calcul difficile du champ de contrainte de la feuille en présence d'un réseau de fissures. En effet, la présence des fissures impose des conditions aux limites complexes sur le bord intérieur de la feuille.

Nous faisons donc l'approximation suivante, schématisée sur la figure 5.20 : on considère que le champ de contrainte est équivalent à celui obtenu pour une membrane annulaire, encastrée à son bord extérieur ($r = R_p$) et contrainte à son bord intérieur

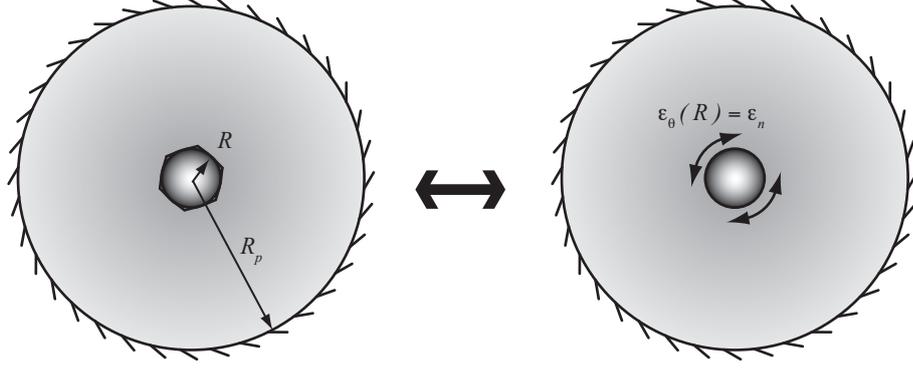


FIG. 5.20 – On fait l'approximation que le champ de contrainte est équivalent à celui d'une membrane annulaire pour laquelle on impose au bord intérieur : $\epsilon_\theta = \epsilon_n$

($r = R$), de sorte que $\epsilon_\theta(R) = \epsilon_n$. Bien entendu, une telle approximation néglige les effets de concentration de contraintes dus à la présence des fissures. La pertinence de cette approche est discutée plus loin.

Soit ζ le déplacement radial dans la membrane. Le problème étant axisymétrique, ζ est uniquement fonction du rayon r . L'équation d'équilibre pour le déplacement radial dans le plan de la membrane s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) - \frac{\zeta}{r^2} = 0 \quad (5.6)$$

La membrane est encastree à son bord extérieur si bien que

$$\zeta(R_p) = 0 \quad (5.7)$$

et la déformation au bord intérieur donne

$$\frac{\zeta(R)}{R} = \epsilon_\theta(R) = \epsilon_n \quad (5.8)$$

On cherche la solution de l'équation 5.6 sous la forme suivante, qui vérifie la condition 5.7

$$\zeta(r) = A \left(\frac{r}{R_p} - \frac{R_p}{r} \right) \quad (5.9)$$

En appliquant la condition 5.8, on trouve la valeur de la constante A :

$$A = - \left(\frac{R_p R^2}{R_p^2 - R^2} \right) \epsilon_n \quad (5.10)$$

Par conséquent, la solution exacte pour le déplacement radial est

$$\zeta(r) = - \frac{R_p R^2}{R_p^2 - R^2} \left(\frac{r}{R_p} - \frac{R_p}{r} \right) \epsilon_n \quad (5.11)$$

A partir du déplacement radial, nous pouvons maintenant déterminer les champs de contrainte et de déformation dans la membrane. Soient respectivement ϵ_r et ϵ_θ les

déformations radiales et azimuthales définies comme suit

$$\epsilon_r(r) = \frac{\partial \zeta}{\partial r}(r) \quad (5.12)$$

$$\epsilon_\theta(r) = \frac{\zeta(r)}{r} \quad (5.13)$$

En remplaçant ζ par son expression trouvée en 5.11, on trouve sans mal les valeurs des déformations :

$$\epsilon_r(r) = -\frac{R^2}{R_p^2 - R^2} \left(\frac{R_p^2}{r^2} + 1 \right) \epsilon_n \quad (5.14)$$

$$\epsilon_\theta(r) = \frac{R^2}{R_p^2 - R^2} \left(\frac{R_p^2}{r^2} - 1 \right) \epsilon_n \quad (5.15)$$

Soient respectivement σ_r et σ_θ les contraintes radiales et azimuthales définies comme suit

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta) \quad (5.16)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r) \quad (5.17)$$

En utilisant les expressions des déformations trouvées en 5.14 et 5.15 on obtient les valeurs des contraintes :

$$\sigma_r(r) = -\frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{R^2}{R_p^2 - R^2} \right) \left((1 - \nu) \frac{R_p^2}{r^2} + 1 + \nu \right) \epsilon_n \quad (5.18)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{R^2}{R_p^2 - R^2} \right) \left((1 - \nu) \frac{R_p^2}{r^2} - 1 - \nu \right) \epsilon_n \quad (5.19)$$

où E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau de la membrane.

Soit U_e l'énergie élastique de la membrane. Seules les déformations et contraintes dans le plan de la membrane contribuent à l'énergie élastique, nous négligeons toute contribution des déformations transverses. Le volume élémentaire $dV = hrdrd\theta$ de la membrane d'épaisseur h possède une énergie élastique infinitésimale dU_e :

$$dU_e = \frac{1}{2} (\epsilon_r \sigma_r + \epsilon_\theta \sigma_\theta) hrdrd\theta \quad (5.20)$$

Ainsi, il suffit d'intégrer sur la surface de la membrane pour obtenir l'énergie élastique globale de cette dernière,

$$U_e = \int_0^{2\pi} \int_R^{R_p} \frac{1}{2} (\epsilon_r \sigma_r + \epsilon_\theta \sigma_\theta) hrdrd\theta \quad (5.21)$$

Le calcul de cette intégrale, détaillé dans l'annexe A, aboutit à l'expression suivante pour l'énergie élastique :

$$U_e = \frac{\pi \epsilon_n^2}{1 - \nu^2} \left((1 - \nu) \frac{R_p^2}{R^2} + 1 + \nu \right) \frac{EhR^4}{R_p^2 - R^2} \quad (5.22)$$

et nous remarquons que dans la limite $R_p \gg R$, la dépendance au rayon extérieur disparaît :

$$U_e \simeq \frac{\pi \epsilon_n^2}{1 + \nu} EhR^2 \quad (5.23)$$

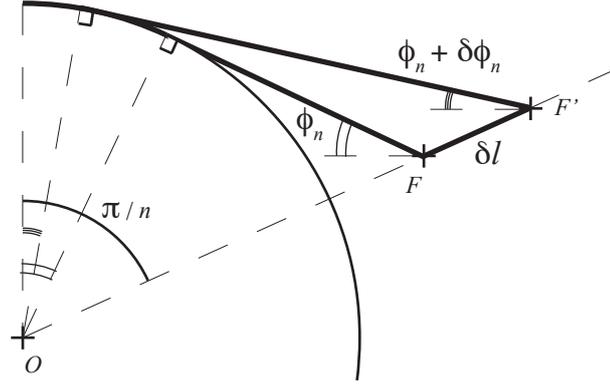


FIG. 5.21 – Schéma géométrique montrant la variation de longueur de fissure δl avec une variation d'angle $\delta\phi_n$

Critère de Griffith

Le critère de Griffith est fondé sur le principe de conservation de l'énergie totale du système. Ainsi, tout accroissement de la longueur d'une fissure doit s'opérer sans variation de l'énergie totale. Soit U_s l'énergie de création de surface due à la présence des fissures. Nous considérons que les contributions à l'énergie totale de la feuille fragile ne proviennent que de l'élasticité et de la création de surface, si bien que l'énergie totale U s'écrit sous la forme :

$$U = U_e + U_s \quad (5.24)$$

Soit L la longueur totale des fissures dans la feuille fragile et l la longueur respective de chaque fissure, de sorte que $L = nl$. Soit Γ l'énergie surfacique d'accroissement d'une fissure, considérée comme constante dans toute la feuille. On peut alors appliquer le critère de Griffith en écrivant la conservation de l'énergie totale avec l'accroissement $\delta L = n\delta l$ de la longueur des fissures :

$$\frac{\delta U}{\delta L} = 0 \quad (5.25)$$

$$= \frac{\delta U_e}{\delta L} + \Gamma h \quad (5.26)$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\delta U_e}{\delta l} + \Gamma h \quad (5.27)$$

Par conséquent le critère de Griffith, donnant la condition pour que chaque fissure avance d'une quantité δl s'écrit :

$$\frac{\delta U_e}{\delta l} = -n\Gamma h \quad (5.28)$$

La figure 5.21 montre l'accroissement de longueur δl d'une fissure lorsque l'angle ϕ_n varie de $\delta\phi_n$. Ainsi, la pointe de fissure initialement localisée en F se propage jusqu'au point F' et par conséquent $FF' = OF' - OF = \delta l$. Or on constate que :

$$OF = Rf(\phi_n) \quad (5.29)$$

$$OF' = Rf(\phi_n + \delta\phi_n) \quad (5.30)$$

où f est une fonction définie comme suit :

$$f(x) = \frac{1}{\cos(\pi/n - x)} \quad (5.31)$$

On a

$$\delta l = OF' - OF \quad (5.32)$$

$$= R(f(\phi_n + \delta\phi_n) - f(\phi_n)) \quad (5.33)$$

$$\simeq R \frac{\partial f}{\partial \phi_n} \delta\phi_n \quad (5.34)$$

Or sachant que $\partial f/\partial x = -\tan(\pi/n - x)/\cos(\pi/n - x)$, on obtient facilement que :

$$\frac{\delta\phi_n}{\delta l} = -\frac{\tan(\pi/n - \phi_n)}{\cos(\pi/n - \phi_n)} \frac{1}{R} \quad (5.35)$$

En constatant que

$$\frac{\delta U_e}{\delta l} = \frac{\delta U_e}{\delta \phi_n} \frac{\delta \phi_n}{\delta l} \quad (5.36)$$

et en se servant des équations 5.22 et 5.35 on aboutit à la relation suivante,

$$g_n(\phi_n) = \frac{1 - \nu^2}{2\pi} \left(\frac{\Gamma}{ER} \right) \frac{R_p^2 - R^2}{R^2} \left((1 - \nu) \frac{R_p^2}{R^2} + 1 + \nu \right)^{-1} \quad (5.37)$$

dans laquelle la fonction g_n est définie par :

$$g_n(\phi_n) = \frac{\phi_n \sin(\pi/n - \phi_n) \cos(\pi/n - \phi_n)}{n \sin(\pi/n) \tan(\pi/n - \phi_n)} \epsilon_n \quad (5.38)$$

La relation 5.37 est une condition qui donne les couples (n, ϕ_n) qui satisfont au critère de Griffith. Ainsi, l'application du critère de Griffith revient à définir les configurations topologiques (n, ϕ_n) permises pour les motifs de rupture en pétales. En outre, on observe que le nombre de solutions de l'équation 5.37 dépend du rayon de pénétration R . Une résolution numérique permet de trouver un rayon minimal en deçà duquel il n'y pas de solution. Pour le papier aluminium, ce rayon minimal est de l'ordre de 0.45 mm. Pour des rayon supérieurs à ce seuil, les solutions (n, ϕ_n) sont telles que $2 \leq n \leq n_m$. Par conséquent, pour tout rayon de pénétration R , le nombre de pétales possible est majoré par $n_m(R)$ comme on peut le voir sur la figure 5.22 (a).

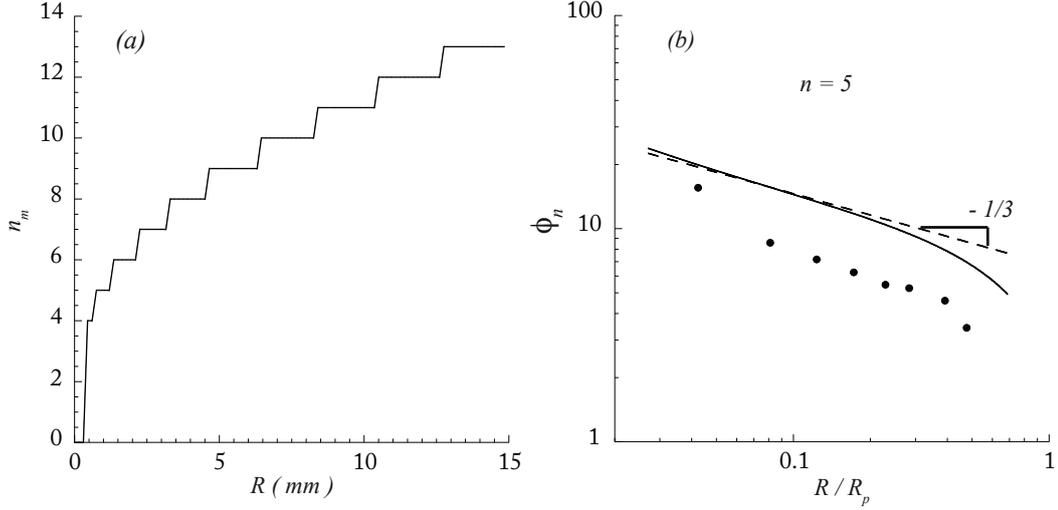


FIG. 5.22 – (a) Variation du nombre maximal de pétales avec le rayon de pénétration R prédit par le modèle théorique pour une feuille de papier aluminium. (b) Variation de l'angle moyen ϕ_n^* en fonction du rayon de perforation R/R_p pour $n = 5$. La courbe en trait continu représente la valeur théorique de ϕ_n calculée numériquement à partir de la relation 5.37, la courbe en pointillés représente la valeur théorique asymptotique de ϕ_n obtenue en 5.40, les ronds noirs représentent les points expérimentaux. Les points expérimentaux sont obtenus en calculant la valeur moyenne des ϕ_n mesurés sur le motif à $n = 5$ pétales. Les mesures sont effectuées avec une feuille de papier aluminium comportant initialement un trou central de 3 mm de diamètre.

L'équation 5.37 est résolue numériquement, toutefois on peut calculer analytiquement la valeur de ϕ_n dans la limite où $R_p \gg R$ et ϕ_n tend vers 0. Limites qui sont justifiées par l'expérience. Tout d'abord, à partir de la valeur de ϵ_n calculée en 5.5 et en considérant que ϕ_n tend vers 0, on obtient une approximation au premier ordre pour ϵ_n ,

$$\epsilon_n \simeq \frac{\phi_n^2}{2} \quad (5.39)$$

Ainsi, en se servant de l'approximation obtenue en 5.39, dans la limite où $R_p \gg R$ et ϕ_n tend vers 0, la relation 5.37 s'écrit

$$\phi_n = \left\{ \left(\frac{1 + \nu}{\pi} \right) \left(\frac{\Gamma}{ER} \right) \left(\frac{n \tan(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} \right) \right\}^{1/3} \quad (5.40)$$

On obtient donc l'angle ϕ_n en fonction du nombre de pétales n . On observe que l'angle dépend du module d'Young et de l'énergie de surface du matériaux, ainsi que du rayon de perforation R suivant le scaling

$$\phi_n \sim \left(\frac{\Gamma}{ER} \right)^{1/3} \quad (5.41)$$

La figure 5.22(b) montre la mesure de l'angle moyen ϕ_n^* en fonction du rayon de pénétration du cône, pour un nombre de pétales $n = 5$. ϕ_n^* représente la valeur moyenne de ϕ_n calculée sur l'ensemble des fissures. Le calcul de la valeur moyenne

des angles ϕ_n mesurés se justifie par le fait que l'avancée des fissures n'est pas un phénomène qui se produit de manière continue comme le critère de Griffith peut le laisser supposer. En effet, l'angle ϕ_n calculé représente un angle limite au delà duquel l'énergie élastique est suffisante pour permettre la création de surface. Plusieurs études montrent le caractère intermittent de la propagation d'une fissure, l'avancée s'opérant sous forme de "burst" [40]. De ce fait, la fissure peut se propager en deçà de l'angle limite ϕ_n tout comme il peut rester en équilibre au delà ; d'où l'utilité de comparer la prédiction théorique à une moyenne des mesures. On observe que la théorie surestime la valeur de l'angle ϕ_n d'environ un facteur 2. Toutefois, la dépendance au rayon est conforme à la prédiction théorique. De plus, la prédiction asymptotique donne une bonne approximation du scaling. La surestimation de l'angle ϕ_n par la théorie peut s'expliquer de plusieurs manières :

- tout d'abord, la valeur de l'énergie de surface mesurée dans la partie 2.2 est sans doute surestimée. En effet, nous avons utilisé une approximation majorant l'énergie élastique en considérant la déformation constante dans tout l'échantillon (cf partie 2.2 et équation 5.2). Une valeur moindre de l'énergie de surface résulterait en une distance de propagation des fissures accrue et, par conséquent, en un angle ϕ_n plus faible.
- Par ailleurs, il se peut qu'une partie non négligeable de l'énergie élastique soit stockée dans les pétales eux-mêmes. Nous ne songeons pas ici à l'énergie de flexion, mais au fait que les pétales subissent eux aussi des déformations planes depuis leurs bases, étirées au contact du cône. Ainsi, une plus grande énergie élastique résulterait également en une distance de propagation de fissures accrue, ce qui aurait pour effet l'obtention d'un angle ϕ_n plus faible.

Hormis la surestimation de l'angle ϕ_n , les résultats expérimentaux valident le modèle théorique développé précédemment. En outre, ils montrent clairement que l'approche de champ moyen utilisée pour calculer le champ de contrainte dans la feuille fragile convient. En effet, le calcul détaillé des concentrations de contraintes aux pointes de fissures s'avère dispensable pour la simple raison que la même approche de champ moyen a été utilisée lors du calcul de l'énergie de surface en 2.2. Ainsi, on tient compte de manière implicite de ces effets dans la mesure même de l'énergie de surface du matériau utilisé.

4.3 Sélection du nombre de pétales n

Au paragraphe précédent, nous avons calculé les configurations (n, ϕ_n) possibles lors de la perforation de la feuille fragile. Toutefois, l'expérience montre que parmi toutes ces configurations, une seule est sélectionnée au cours d'une expérience (n se stabilise rapidement à mesure qu'on augmente R), et de plus, en fonction du matériau utilisé, la distribution du nombre de pétales est fortement piquée, centrée sur un nombre de pétales le plus probable (cf la figure 5.16). Par ailleurs, le nombre de pétales le plus probable varie très peu avec les différents matériaux. Ainsi, les expériences conduites avec du papier aluminium montrent un pic en $n = 5$, celles effectuées avec du papier soie présentent un pic en $n = 6$.

Dans cette partie, nous montrons que le modèle développé précédemment permet d'anticiper le fait que la sélection du nombre de pétales s'opère en faveur des nombres de pétales petits. En revanche, l'instabilité des pointes de fissures empêchant d'obtenir des $n < 4$ (cf partie 3.1), ne peut être prédite par ce modèle et fera l'objet d'une discussion.

Optimisation de n par rapport à l'énergie du système

On s'intéresse ici à la minimisation de l'énergie totale du système au cours de son évolution. En effet, en considérant l'historique du phénomène, on souhaite trouver un nombre de pétales n^* pour lequel l'énergie totale, calculée entre le rayon critique d'apparition des fissures R_c et le rayon de pénétration R , est minimale.

$$\frac{\partial}{\partial n} \int_{R_c}^R \frac{\partial U}{\partial R} dR = \frac{\partial U^*}{\partial n} = 0 \quad (5.42)$$

où $R_c = (1 + \epsilon_c)R_0$, R_0 étant le rayon initial du trou au centre de la feuille, ou le rayon initial sur lequel s'étendent les fissures. Cette approche est comparable à celles employées dans diverses études de perforation de plaques de métal par des projectiles [34], [35] et [41].

Cette intégrale est évaluée numériquement, cependant, on peut la calculer analytiquement dans le cas limite déjà étudié précédemment, à savoir lorsque ϕ_n tend vers 0 et que $R_p \gg R$. Dans de telles conditions, on obtient l'énergie élastique en fonction de n à l'aide des équations 5.23, 5.39 et 5.40 :

$$U_e = \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \nu}{\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{n \tan(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} \right)^{4/3} \left(\frac{\Gamma^4 R^2 h^3}{E} \right)^{1/3} \quad (5.43)$$

Par ailleurs, l'énergie de création de fissures s'écrit :

$$U_s = n\Gamma h \left(\frac{R}{\cos(\pi/n)} - R_0 \right) \quad (5.44)$$

Ainsi, on obtient l'expression de l'intégrale,

$$\begin{aligned} U^* &= \Gamma h (R - R_c) \left\{ \frac{n}{\cos(\pi/n)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{n \tan(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} \right)^{4/3} \left(\frac{(1 + \nu) \Gamma}{\pi E (R - R_c)} \right)^{1/3} \right\} \end{aligned} \quad (5.45)$$

dont on cherche le minimum en fonction de n . Le nombre de pétales optimal n^* est alors celui pour lequel :

$$\begin{aligned} G &= \frac{\Gamma}{E(R - R_c)} \\ &= \left(\frac{27\pi}{1 + \nu} \right) \frac{\cos(\pi/n^*)}{n^* \tan(\pi/n^*)} \left(\frac{\pi}{n^*} \tan(\pi/n^*) - 1 \right)^3 \\ &\quad \times \left(\tan(\pi/n^*) - \frac{\pi}{n^*} \frac{1 + \sin^2(\pi/n^*)}{\cos^2(\pi/n^*)} \right)^{-3} \end{aligned} \quad (5.46)$$

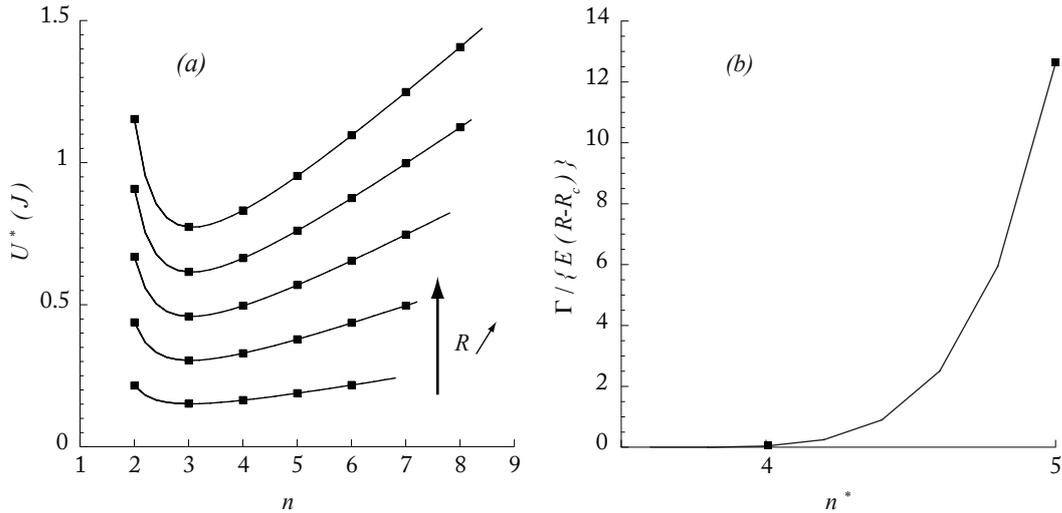


FIG. 5.23 – (a) Evolution théorique de U^* en fonction de n pour une feuille de papier aluminium comportant initialement un trou centré de 3 mm de diamètre. Le calcul est effectué pour différentes valeurs du rayon de pénétration R , comprises entre 2 mm et 4 mm. (b) Evolution du nombre sans dimension $\Gamma / \{E(R - R_c)\}$ en fonction du nombre de pétales optimal n^* , calculée suivant la formule 5.46.

La figure 5.23 (a) montre la variation de U^* avec n pour une feuille de papier aluminium comportant un trou central de diamètre 3 mm. On observe que le minimum d'énergie est obtenu pour $n^* = 3$. Toutefois, on observe également que le minimum est d'autant plus marqué que le rayon de pénétration augmente. Ainsi, pour des rayons de pénétration R de l'ordre du rayon critique d'apparition des fissures, le profil de la courbe est plus plat qu'aux plus grands rayons, ce qui peut expliquer en partie la dispersion sur les résultats expérimentaux reportés dans la figure 5.16 (a). La relation 5.46 est représentée graphiquement sur la figure 5.23 (b). Ainsi, le calcul réalisé dans la limite ϕ_n tendant vers 0 et R petit devant R_p , donne dans le cas de la feuille d'aluminium un nombre de pétales optimal $n^* = 4$, ce qui correspond au nombre sans dimension G qui dans l'expérience est tel que $10^{-2} < G < 10^{-1}$. Sur la courbe, on observe qu'un nombre de pétales optimal de $n^* = 5$ serait obtenu dans le cas où $G = 12$. Or la valeur $G = 12$ est démesurément grande car pour l'ensemble des matériaux testés $G < 10^{-1}$. Ceci explique sans doute pourquoi nous n'arrivons pas à obtenir des grands nombres de pétales et ce, peu importe le matériau utilisé.

En somme, il est clair que la seule donnée du nombre de pétales n^* , optimal vis à vis de l'énergie, ne suffit à prédire le nombre de pétales observé dans l'expérience. Toutefois, il est intéressant de remarquer que les faibles nombres de fissures sont favorisés du point de vue énergétique. De plus, l'analyse asymptotique montre clairement que les grands nombres de pétales sont exclus pour l'ensemble des matériaux testés.

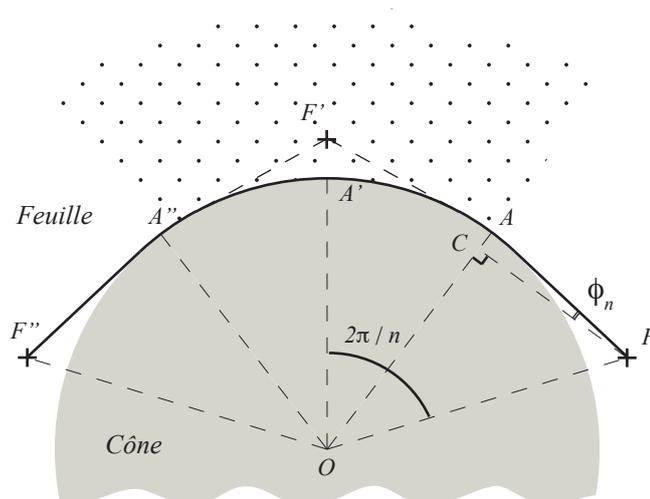


FIG. 5.24 – Schéma géométrique montrant la déformation du bord intérieur de la feuille fragile lors d'un changement de configuration de n à $n-1$ pétales. On considère que la déformation change seulement dans la région représentée par des pointillés.

Prise en compte du caractère discret du problème

L'étude précédente montre qu'il existe un nombre de pétales n^* qui minimise l'énergie globale du système. Toutefois, les expériences montrent que ce nombre de fissures n'est pas le plus probable, qui plus est, il n'est jamais atteint avec les matériaux testés au cours de cette étude, les fissures étant instables pour $n \leq 4$. Ainsi, il n'est pas surprenant que le nombre optimal de fissures n^* prédit par le modèle diffère de celui observé dans les expériences. Par ailleurs, l'autre prédiction importante du modèle est le fait que les petits nombres de pétales soient favorisés du point de vue énergétique. Dès lors, on peut se demander pourquoi, lorsqu'on débute l'expérience avec un nombre de fissures élevé, le système n'évolue pas toujours vers la sélection du nombre de fissures stable le plus petit possible n_{st} (à savoir $n_{st} = 5$ dans le cas du papier aluminium). Si le nombre de pétales diminue, localement la feuille fragile se trouve déformée davantage. Ceci constitue une barrière seulement franchissable si le système possède suffisamment d'énergie élastique. Dans ce paragraphe, nous abordons donc le caractère discret du problème et montrons que les sauts d'énergie, nécessaires à l'abaissement du nombre de fissures, influent grandement sur les motifs de brisure observés.

La figure 5.24 montre le schéma du changement de configuration de n à $n-1$ pétales. Cette situation est intéressante dans la mesure où nous avons vu que diminuer le nombre de pétales revient à abaisser l'énergie totale du système. On considère que ce changement s'opère lorsque la fissure séparant deux pétales voisins (la fissure en F' sur le schéma) cesse de progresser, de telle sorte que les deux pétales ne forment plus qu'un. Ce changement de topologie induit une augmentation de la déformation au voisinage de l'ancienne pointe de fissure F' , si bien que le passage de n à $n-1$ pétales nécessite le franchissement d'une barrière d'énergie. Nous faisons l'approximation que seule la région en pointillés voit son énergie augmenter. Dans la

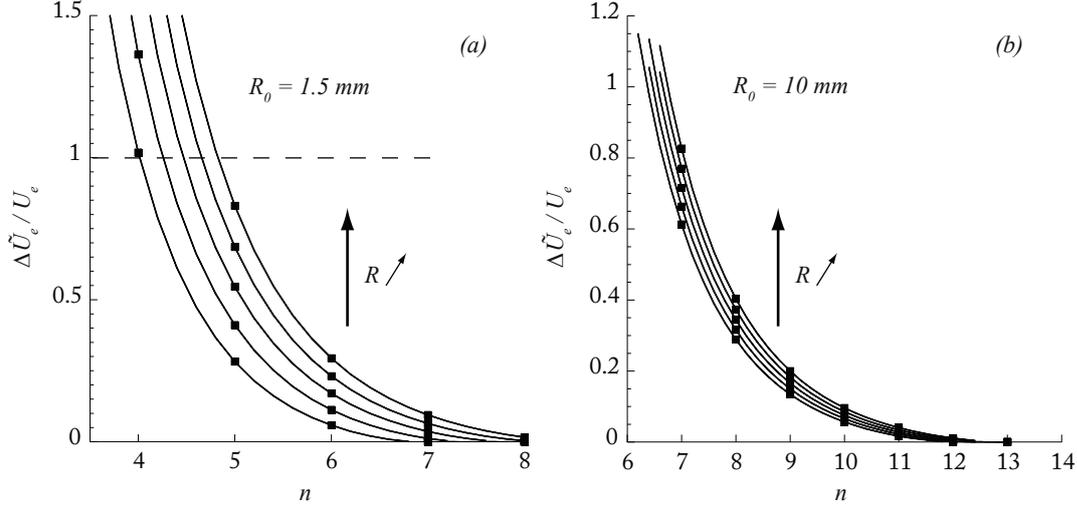


FIG. 5.25 – Evolution de la variation d'énergie élastique relative $\Delta\tilde{U}_e/U_e$, nécessaire à la diminution du nombre de pétales, en fonction de n , pour une feuille de papier aluminium. Les courbes sont représentées pour plusieurs rayons de pénétration : de $R = 2 \text{ mm}$ à $R = 4 \text{ mm}$ pour (a), de $R = 10.5 \text{ mm}$ à $R = 12.5 \text{ mm}$ pour (b).

au contact du cône. Soit $\tilde{\epsilon}_n$ la déformation occasionnée par le passage de n à $n - 1$ pétales. Sur le schéma, elle correspond à la déformation de la ligne $AA'A''$. Ainsi $\tilde{\epsilon}_n$ est égale à la déformation ϵ_n dans le cas où $\phi_n = \pi/n$, c'est à dire le cas pour lequel la pointe de fissure F' coïncide avec le bord du cône. Ce qui donne :

$$\tilde{\epsilon}_n = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)} - 1 \quad (5.47)$$

L'énergie n'ayant varié que dans une région de largeur angulaire $2\pi/n$, la variation d'énergie élastique due au changement de topologie s'écrit :

$$\Delta\tilde{U}_e = \frac{\pi}{1 - \nu^2} \left((1 - \nu) \frac{R_p^2}{R^2} + 1 + \nu \right) \frac{EhR^4}{R_p^2 - R^2} \frac{\tilde{\epsilon}_n^2 - \epsilon_n^2}{n} \quad (5.48)$$

Le seul réservoir d'énergie dans lequel la feuille fragile peut puiser pour franchir la barrière énergétique $\Delta\tilde{U}_e$ est l'énergie élastique. Ainsi, il est intéressant d'exprimer la variation relative d'énergie élastique nécessaire pour changer de topologie :

$$\frac{\Delta\tilde{U}_e}{U_e} = \frac{\tilde{\epsilon}_n^2 - \epsilon_n^2}{n\epsilon_n^2} \quad (5.49)$$

La figure 5.25 montre la variation relative d'énergie élastique nécessaire pour passer de n à $n - 1$ pétales en fonction de n . On observe que la barrière d'énergie à franchir pour changer de configuration décroît avec n et augmente avec R . Ainsi, lorsque la feuille commence à se déchirer avec un motif à n pétales, passer à une configuration à $n - 1$ pétales devient de plus en plus coûteuse en énergie à mesure que R augmente. Ceci explique pourquoi des configurations à $n > n_{st}$ pétales sont observées expérimentalement. Par ailleurs, on observe que la diminution du nombre de pétales est d'autant plus facile que n est grand : en effet, on voit sur la figure 5.25

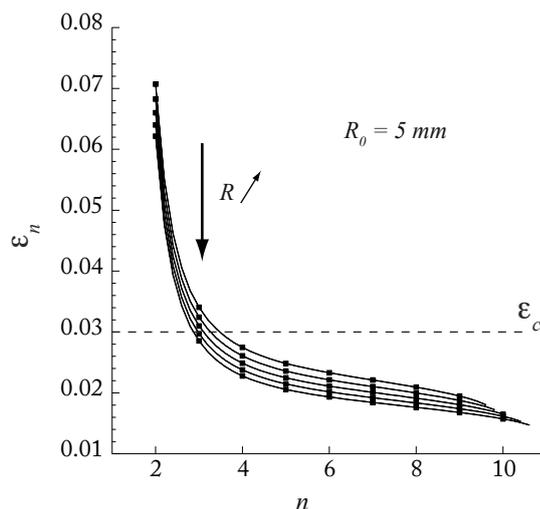


FIG. 5.26 – Evolution de la déformation ϵ_n en fonction de n calculée dans le cas d'une feuille de papier aluminium avec un trou initial centré de rayon $R_0 = 5$ mm. Les calculs sont effectués pour différentes valeurs du rayon de pénétration variant de $R = 5.5$ mm à $R = 7.5$ mm. Les courbes en traits pleins et les carrés noirs représentent les valeurs théoriques, la droite en pointillés représente la déformation critique ϵ_c correspondant au seuil de rupture du matériau.

(b) qu'au delà de $n = 10$, le changement de configuration est aisé avec $\Delta\tilde{U}_e/U_e \sim 5 \times 10^{-2}$ pour le papier aluminium. Ceci explique pourquoi les expériences menées avec un nombre de fissures initiales $n_0 > 10$ conduisent à des nombres finaux voisins de 10. Par conséquent, l'étude des sauts d'énergie nécessaire à l'abaissement du nombre de pétales permet de comprendre les résultats expérimentaux exposés dans la figure 5.5 pour les nombres de fissures initiales $n_0 > 5$.

Cas des nombres de pétales $n < n_{st}$

Dans la partie 3.1, nous avons vu que les configurations avec un nombre de pétales $n \leq 4$ sont instables dans le cas de l'aluminium ($n_{st} = 5$). Les expériences effectuées avec un nombre initial $n_0 \leq 4$ de fissures (illustrées par les figures 5.13, 5.7, 5.9 et 5.10), montrent que de nouveaux pétales se créent à mesure qu'on perfore la feuille. La figure 5.26 montre la variation de la déformation ϵ_n au contact du cône en fonction de n prédite par la théorie dans le cas d'une feuille de papier aluminium. On observe que pour les petits nombres de pétales, $n \leq 3$, et pour R suffisamment petit, la déformation du bord intérieur de la plaque dépasse la déformation critique correspondant au seuil de rupture du matériau, surtout pour le motif à $n = 2$ pour lequel $\epsilon_n \simeq 2\epsilon_c$. Cette prédiction du modèle est en accord avec l'instabilité du motif à $n = 2$ fissures visible sur la figure 5.13 (c). En effet, dans le cas où $n_0 = 2$ on observe l'apparition de nouveaux fissures au niveau des deux pétales déjà existants. Par ailleurs, on note, de manière globale, que la déformation du bord intérieur décroît avec le rayon de pénétration R . En effet, la dépendance de ϵ_n au rayon de pénétration est obtenue facilement dans la limite $R_p \gg R$ et ϕ_n petit : en utilisant les relations

5.39 et 5.40 on obtient le scaling suivant :

$$\epsilon_n \sim \left(\frac{\Gamma}{ER} \right)^{2/3} \quad (5.50)$$

Ceci indique qu'aux grands rayons de pénétration, peu importe les motifs de brisure, les déformations deviennent inférieures au seuil de rupture. Par conséquent, l'argument de dépassement de la contrainte critique ne peut expliquer l'instabilité de branchement de fissures observée pour les motifs $n = 3$ et $n = 4$. En effet, ces instabilités de branchement de fissures s'opèrent également aux grands rayons de pénétration.

5 Discussion

Dans cette partie, nous discutons des limites de l'étude et du parti pris de l'approche énergétique globale. Nous considérons le cas des nombres de pétales $n < n_{st}$, justifions le choix d'un mode d'avancée radiale des fissures dans le modèle théorique et nous abordons la question du réarrangement des pétales lorsque le motif d'ouverture n'est pas uniforme.

5.1 Branchement des fissures dans les cas $n < n_{st}$

Nous avons vu dans la partie 4.3 que le modèle théorique présenté dans cette étude ne pouvait prédire l'instabilité de branchement des fissures, observée dans les expériences pour un nombre de pétales $n < n_{st}$. En effet, la description théorique de ces instabilités de branchement dépasse le cadre de notre travail. Toutefois, l'étude de la stabilité d'une fissure et de son branchement a fait l'objet de plusieurs travaux ([42], [43] et [44]) qui envisagent des cas de fissures soumises à un champ de contrainte bi-axial. Un tel mode de chargement de la fissure est comparable à celui observé dans nos expériences, comme le montre le schéma de la figure 5.27 (a), à la grande différence, toutefois, que les fissures ne sont pas à faces parallèles dans notre cas. Lors de la perforation, les pointes de fissures sont soumises à des forces de tractions portées par les bords des pétales. Ceci résulte en chargement qui s'apparente au mode bi-axial, avec des contraintes de tension $T_{//}$ et T_{\perp} respectivement parallèle et orthogonale au plan de symétrie de la fissure. La théorie présentée par B.Cotterel et J.R Rice [42] a mis en évidence l'instabilité d'une fissure soumise à la fois à des tensions orthogonales et parallèles à son plan. Les travaux plus récents de M. Adda-Bedia [44] et de D.Leguillon et S.Murer [43], quant à eux, nuancent cette théorie et démontrent l'existence d'un seuil d'intensité de la tension parallèle au plan de la fissure pour que le branchement aie lieu. Ceci est cohérent avec nos observations expérimentales : les branchements de fissures ne sont observés que pour les cas $n \leq 4$ (dans le cas de l'aluminium), c'est à dire précisément les cas qui présentent le plus petit angle β entre pétales adjacents. Or, en se fiant à la figure 5.27, il est intuitif que le rapport $T_{//}/T_{\perp}$ augmente lorsque l'angle β diminue résultant en une plus grande instabilité de la fissure.

Par ailleurs, le cas singulier à $n = 4$ pétales avec des fissures tournantes, visible sur la figure 5.12, peut être interprété comme un mode stable de chargement biaxial

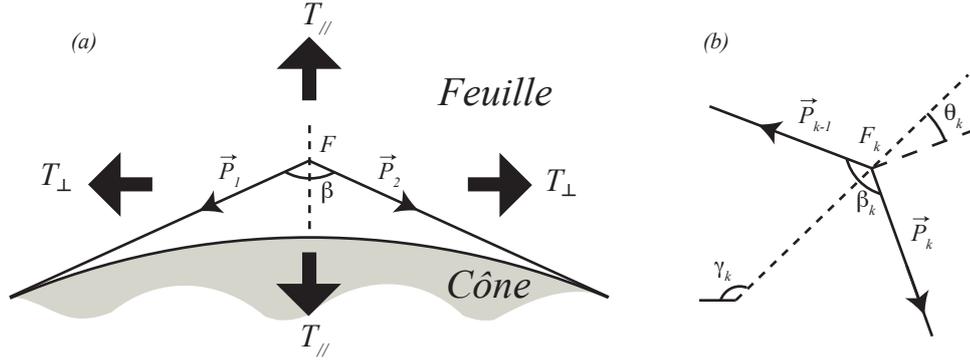


FIG. 5.27 – (a) Schéma du mode de chargement d'une fissure lors de la perforation. La pointe de fissure F est soumise à deux forces \vec{P}_1 et \vec{P}_2 portées par le bord des pétales adjacents. Ceci résulte en un champ de contrainte bi-axial avec des tension $T_{//}$ et T_{\perp} respectivement parallèle et orthogonale au plan de la fissure. β est l'angle à la pointe de fissure entre les deux pétales adjacents. β est une fonction croissante de n . (b) Schéma montrant les notations utilisées dans l'étude du réarrangement d'un motif non uniforme. Pour $1 \leq k \leq n$, la fissure F_k est repérée par l'angle γ_k . L'angle dont dévie le trajet de la fissure par rapport à la direction radiale est noté θ_k .

des fissures discuté en 5.1. En effet, dans le cas $n = 4$, l'angle β , aux pointes de fissures, est tel que $\beta \simeq \pi/2$. Pour un angle droit à la pointe de fissure, hormis le plan porté par la bissectrice de l'angle β , on voit sur la figure 5.27 (i) que des plans d'avancée portés par les directions des forces \vec{P}_1 et \vec{P}_2 correspondraient à deux autres configurations de chargement biaxial. Dans l'hypothèse où ces configurations sont stables, ceci explique l'existence du cas singulier des fissures tournantes observé pour $n = 4$ et l'écart au mode d'avancée radiale.

5.2 Choix du mode d'avancée radiale des fissures et évolution d'un motif non uniforme

Le modèle théorique développé à la partie 4 considère un motif de brisure uniforme (intervalle angulaire entre chaque fissure égal à π/n) avec un mode d'avancée radiale des fissures. Une étude rapide du champ de contrainte au voisinage de la fissure permet de justifier ce choix. Les notations utilisées sont celles de la figure 5.27 (b). Dans un motif à n pétales, considérons la fissure F_k ($k \in [1; n]$) comme un coin sur lequel s'appliquent deux forces par unité d'épaisseur \vec{P}_{k-1} et \vec{P}_k portées par les bords intérieurs de la feuille. Le champ de contrainte dû à l'application de forces sur un coin d'un solide élastique est traité dans l'ouvrage de S.P. Timoshenko & J.N. Goodier [45]. Ainsi dans le cas représenté sur la figure 5.27 (b), le champ de contrainte radial dont l'origine est prise au sommet du coin F_k s'écrit :

$$\sigma_r = -\frac{P_k + P_{k-1}}{r} \left(\frac{\cos(\alpha) \cos(\theta)}{\alpha + 1/2 \sin(2\alpha)} \right) + \frac{P_k - P_{k-1}}{r} \left(\frac{\sin(\alpha) \sin(\theta)}{\alpha - 1/2 \sin(2\alpha)} \right) \quad (5.51)$$

où l'angle α est ici égal à $\alpha = \pi - \beta_k/2$. Par ailleurs, on peut considérer que les forces P_{k-1} et P_k sont proportionnelles aux déformations des bords de la feuille, de part et

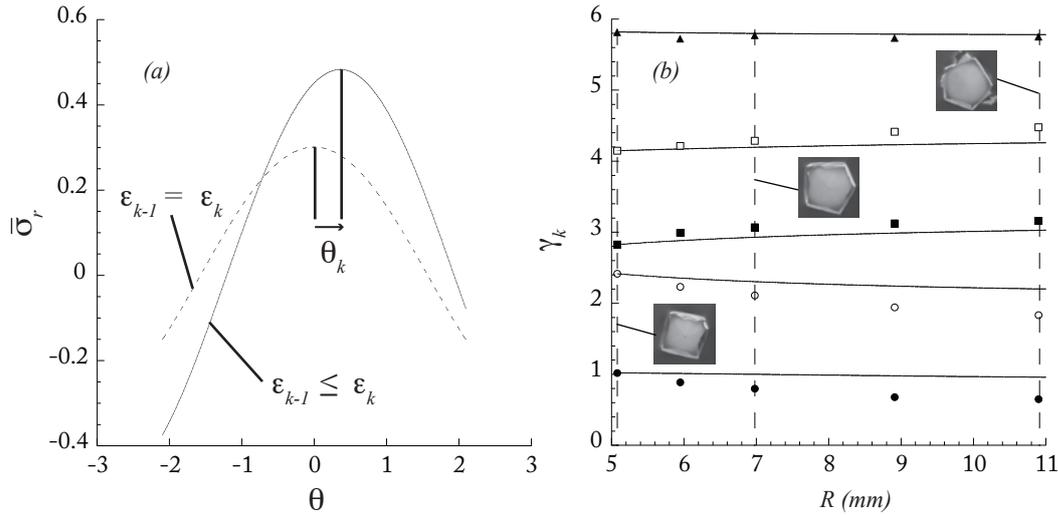


FIG. 5.28 – (a) Variation de la contrainte normalisée $\bar{\sigma}_r$ avec l'angle θ . La courbe en pointillé montre le cas pour lequel $\epsilon_k = \epsilon_{k-1}$, celle en trait continu représente un cas pour lequel $\epsilon_k > \epsilon_{k-1}$. L'écart de position du maximum de contrainte est repéré par l'angle θ_k . (b) Evolution de la position angulaire γ_k des fissures pour un motif de brisure non uniforme à $n = 5$ pétales. Les différents points correspondent aux mesures expérimentales, les courbes en trait continu représentent les prédictions théorique sans paramètre ajusté. Les droites verticales en pointillés repèrent les rayons de pénétration R correspondant aux photographies issues de l'expérience.

d'autre du coin, ϵ_{k-1} et ϵ_k , si bien que les forces peuvent s'écrire sous la forme

$$P_k = P_0 \epsilon_k \quad (5.52)$$

ce qui permet d'écrire le champ de contrainte sous la forme

$$\sigma_r = \frac{P_0}{r} \bar{\sigma}_r \quad (5.53)$$

où $\bar{\sigma}_r$ est le champ de contrainte normalisé. La figure 5.28 (a) montre la variation du champ de contrainte normalisé avec l'angle θ mesuré par rapport à la direction radiale. La courbe en pointillés montre le cas où les déformations de part et d'autre de la fissure sont égales $\epsilon_k = \epsilon_{k-1}$. Cette configuration symétrique correspond aux motifs de brisure uniformes. Pour une telle configuration, le célèbre principe de symétrie locale de Goldstein & Salganik [46] implique une avancée de la fissure dans la direction radiale $\theta = 0$. Ceci justifie le choix d'un mode d'avancée radiale des fissures pour un motif de brisure uniforme.

Par ailleurs, nous pouvons vérifier qu'un motif de brisure asymétrique évolue vers l'uniformisation du motif, et donc vers une propagation radiale de ses fissures. Lorsque l'intervalle angulaire entre fissures n'est plus uniformément égal à π/n , les déformations de chaque côté ϵ_k et ϵ_{k-1} ne sont plus égales. Dans cette situation, le champ de contrainte au voisinage d'une fissure est illustré sur la figure 5.28 (a) par la courbe en trait continu. On observe que le maximum de contrainte se déplace vers le

coté le plus tendu. Le principe de symétrie locale implique que la fissure se propage dans une direction repérée par le maximum, au voisinage duquel la contrainte est symétrique. L'angle de déviation à la direction radiale est alors noté θ_k . Cet angle peut être calculé à l'aide des relations 5.51 et 5.52 :

$$\tan(\theta_k) = -\frac{\epsilon_k - \epsilon_{k-1}}{\epsilon_k + \epsilon_{k-1}} \left(\frac{\alpha - 1/2 \sin(2\alpha)}{\alpha + 1/2 \sin(2\alpha)} \right) \tan(\alpha) \quad (5.54)$$

Afin de calculer le trajet des fissures dans le cas non uniforme, nous effectuons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- nous considérons le cas asymptotique pour lequel $R_p \gg R$ et ϕ_k petit.
- nous supposons que la déformation de chaque pétale, ϵ_k , est égale à la déformation d'un pétale de même intervalle angulaire prédite pour un motif uniforme.

Ainsi, l'angle entre les bords des pétales s'écrit comme suit :

$$\beta_k = \pi - \frac{\gamma_k - \gamma_{k-2}}{2} \quad (5.55)$$

où γ_k est la position angulaire de la fissure F_k (voir figure 5.27 (ii)). Ceci permet alors d'exprimer l'angle α de la manière suivante,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma_k - \gamma_{k-2}}{2} \quad (5.56)$$

La déformation des pétales est obtenue à l'aide des relations 5.39 et 5.40 en remplaçant n par $2\pi/\Delta\gamma_k$, où $\Delta\gamma_k = \gamma_k - \gamma_{k-1}$:

$$\epsilon_k = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1+\nu}{\pi} \right) \left(\frac{\Gamma}{ER} \right) \left(\frac{2\pi \tan(\Delta\gamma_k/2)}{\Delta\gamma_k \cos(\Delta\gamma_k/2)} \right) \right\}^{2/3} \quad (5.57)$$

Ainsi, nous avons complètement déterminé l'angle d'avancée de la fissure θ_k . Pour une augmentation infinitésimale δR du rayon de pénétration, on exprime la variation de position de la fissure $\delta\gamma_k$ de la manière suivante :

$$\tan(\delta\gamma_k) = \frac{\delta R}{R + \delta R} \tan(\theta_k) \quad (5.58)$$

De cette manière nous pouvons calculer la trajectoires des fissures pour des positions initiales données. La figure 5.28 (ii) montre l'évolution de la position des fissures d'un motif de rupture non uniforme à $n = 5$ pétales. On observe que le modèle est en bon accord avec l'expérience et que la théorie développée précédemment démontre clairement l'évolution du motif vers l'uniformité. En revanche, le modèle sous-estime la *rapidité* avec laquelle le motif évolue. Ceci peut s'expliquer par l'approximation sur le calcul des déformations des pétales : nous avons considéré la déformation ϵ_k égale à celle prédite pour un motif uniforme. Néanmoins, ces résultats théoriques et expérimentaux apportent la preuve que la configuration du motif à l'équilibre est uniforme. Ceci justifie la description géométrique choisie pour le modèle de la partie 4.

6 Conclusion

6.1 Résumé de l'étude

L'étude de la perforation d'une feuille fragile révèle qu'une approche énergétique globale permet la compréhension de l'évolution du motif de brisure en fissures radiales. De simples considérations géométriques, ainsi que l'application du critère de Griffith, permettent de déterminer fidèlement la forme de la membrane au contact du cône. La minimisation de l'énergie globale du système, regroupant un terme élastique et un terme de création de surface, prédit un nombre optimal de pétales, voisin de $n^* = 3$, qui ne varie quasiment pas en fonction des différents matériaux utilisés. Néanmoins, l'aspect singulier du mode d'ouverture des fissures, entraînant une instabilité de branchement, empêche l'obtention de ce nombre optimal dans l'expérience. Les observations montrent, toutefois, que le nombre de fissures le plus probable est le plus petit nombre $n \geq n^*$ présentant des fissures stables. Enfin, si le nombre le plus probable n'est pas toujours observé, c'est à cause des barrières d'énergie que doit franchir le système pour diminuer son nombre de fissures. Ces barrières, négligeables devant l'énergie élastique de la feuille dans le cas d'un grand nombre de fissures, augmentent considérablement lorsque n diminue, si bien que pour des n voisins de n^* elles demeurent infranchissables. Ceci explique le fait qu'un grand nombre initial de fissures évolue vers un nombre significativement plus petit au cours de la perforation de la feuille fragile. Enfin, le modèle prédit les réarrangements du réseau de fissures qui évolue systématiquement vers un motif uniforme.

6.2 Lien avec la fragmentation des plaques fragiles

Les travaux sur la perforation d'une feuille fragile ont permis d'étudier en détails l'évolution d'un réseau de fissures. L'expérience et le modèle théorique développé montrent comment les fissures radiales se réarrangent pendant la pénétration du cône dans la feuille. Ainsi, on a remarqué les comportements suivant :

- le nombre optimal de fissures varie très faiblement d'un matériau à un autre ;
- un grand nombre de fissures initiales évolue systématiquement vers un motif présentant un nombre de fissures voisin du nombre de fissures optimal ;
- des fissures initiales distribuées aléatoirement évoluent systématiquement vers un motif uniforme à mesure que le cône perce la feuille.

Ainsi, ces caractéristiques du phénomène s'apparentent à celles observées lors de l'évolution des fissures radiales dans une plaque fragile après impact. En effet, nous avons remarqué (voir chapitre 3 parties 4 et 5) que les nombres finaux de fissures mesurés pour des plaques de verre et de PMMA étaient du même ordre $2 \leq n \leq 10$. D'une part, l'ordre de grandeur de n est le même que celui prédit par le modèle, d'autre part, la variation minimale du nombre de fissures optimal théorique est cohérente avec le faible écart sur la sélection du nombre de fissures entre le PMMA et le verre.

Par ailleurs, nous avons fait état de la diminution du nombre de fissures avec la distance au point d'impact dans le cas des plaques fragiles. Les expériences, conduites lors de la présente étude, montrent qu'un grand nombre de fissures initiales diminue à mesure que le cône pénètre dans la feuille fragile. L'évolution du système, prédite par le modèle et en accord avec les expériences, a ainsi tendance à gommer les imperfections du matériaux à mesure que le rayon de pénétration grandit. De même, dans le cas d'une plaque de verre soumise à un impact, le nombre de fissures, initialement grand en raison de la fragilité du matériau, diminue largement à mesure que les fissures se propagent loin du point d'impact.

Enfin, le modèle démontre que les fissures progressent en tendant vers un motif de brisure uniforme, et ce peu importe la distribution initiale des fissures. Ce résultat prouve qu'il n'est pas nécessaire d'envisager une sélection des modes azimutaux de la plaque, via une instabilité quelconque, pour obtenir des motifs de rupture réguliers.

6.3 Intérêt de l'étude

Dans le contexte de l'étude de la fragmentation des plaques, ces travaux présentent un intérêt évident. La phénoménologie observée et les prédictions théoriques, validées par l'expérience, sont cohérentes avec les comportements observés dans le cas des plaques fragiles. Dès lors, même si cela demeure très simpliste, on peut imaginer que la réponse flexionnelle, consécutive à l'impact d'une plaque, se substitue au cône utilisé pour perforer les feuilles fragiles. Ainsi, dans le cas des plaques fragiles, le rayon de courbure azimutal imposé par la déformation transverse agirait comme le rayon de pénétration du cône de perforation. Evidemment, l'épaisseur non négligeable d'une plaque, le caractère dynamique du phénomène ainsi que son aspect statistique n'autorisent pas le passage direct d'un problème à l'autre. Toutefois, les deux phénomènes semblent voisins.

Par ailleurs, ce travail apparaît comme un nouvel exemple de problème de fragmentation pour lequel la géométrie guide la progression des fissures, s'ajoutant ainsi à l'étude réalisée par B. Audoly & *al* [38].

Chapitre 6

Conclusion

Les travaux accomplis au cours de cette thèse, au delà de leur originalité, apparaissent comme une réelle confirmation de l'idée que nous nous étions faite au sujet des phénomènes de fragmentation solide. Oui, la réponse élastique du matériau, comme, par exemple, la dynamique des ondes acoustiques consécutive à un impact, influence grandement les processus de brisure. Bien entendu, la seule compréhension du problème élastique ne peut suffire à la prédiction des distributions des fragments d'un objet fragile brisé. Toutefois, la régularité des motifs de rupture, observée avec les barres et les plaques fragiles, démontre que l'approche inverse, fondée uniquement sur l'étude de la distribution des défauts au sein du matériau, ne tient pas. Par conséquent, même pour des cas exhibant des distributions de tailles de fragments très larges et des patterns de brisure irréguliers (voir figure 1.1), pourquoi ne pas penser que la complexité des résultats obtenus réside davantage dans la complexité de la réponse élastique elle-même, plutôt que dans le caractère aléatoire de la distribution des hétérogénéités dans le milieu ? Cette question résume bien les motivations de l'équipe à poursuivre les travaux sur le thème de la fragmentation solide.

Ainsi, les premiers travaux effectués durant la thèse sur le phénomène du repliement d'un élastique, outre leur aspect amusant, permirent une avancée dans la documentation de l'instabilité de flambage dynamique consécutive à un impact axial sur une barre. Dans le cas d'un élastique initialement tendu, la longueur d'onde de flambage dépend seulement de l'élongation initiale et de l'épaisseur de l'élastique, ce qui constitue l'originalité du problème dans ce cas précis. Par ailleurs, l'étude de l'influence du milieu extérieur apparaît comme le premier traitement du couplage de la propagation d'une onde élastique longitudinale avec un fluide environnant. Ainsi, nous avons montré l'effet d'étalement d'un front d'onde sous l'influence de la viscosité du fluide. De plus, l'élastique apparaît comme un système expérimental de grand intérêt dans l'optique d'étudier l'effet d'un impact avoisinant, ou même dépassant la vitesse du son dans le milieu, ce qui sera le thème de futurs travaux. Enfin, un lien direct est établi entre l'instabilité de flambage dynamique conduisant au repliement de l'élastique et l'instabilité, de même nature, qui provoque la brisure d'une barre fragile soumise à un impact axial. D'ailleurs, les études effectuées sur les barres fragiles illustrent la complexité des processus menant à la brisure, et ce, même dans le cas d'un objet unidimensionnel. Dès lors, la compréhension de phénomènes de fragmentation dans des géométries bi ou tridimensionnelles s'apparente à un véritable défi.

Le second travail qui fut l'objet d'une publication porte sur le thème de l'instabilité de flambage dynamique azimutale observée après un impact sur une membrane élastique. Nous interprétons cette instabilité dynamique, jamais traitée jusque là, comme le déclencheur de la brisure dans le cas d'un impact sur une plaque fragile. Toutefois, plusieurs aspects liés à la phénoménologie, comme le fait qu'on observe la sélection d'une longueur d'onde plutôt qu'un nombre azimutal, nous permirent d'écarter cette hypothèse. Néanmoins, cette étude demeure intéressante dans la mesure où elle est la première à documenter le phénomène, et à proposer un modèle théorique qui prédit le temps seuil d'instabilité ainsi que la longueur d'onde de flambage. Par ailleurs, nous envisageons de conduire les mêmes expériences avec une membrane reposant à la surface d'un fluide. Une telle étude peut trouver des applications géophysiques, comme la formation des cratères dus aux impacts de météorites sur la croûte terrestre.

Toujours dans une géométrie bidimensionnelle, la perforation statique des feuilles fragiles met en évidence la fragmentation en pétales, jamais traitées dans le cas purement élastique. Hormis certaines instabilités liées au mode de chargement singulier des fissures, la phénoménologie observée présente de nombreux points communs avec l'évolution des fissures radiales consécutives à un impact sur une plaque fragile. Ainsi, en modélisant le champ de contrainte élastique dans la feuille et en utilisant un modèle classique d'avancée de fissure, notre théorie prédit un nombre optimal de pétales très faiblement dépendant des propriétés du matériau comme les nombreuses expériences le confirment. De plus, nous avons démontré que l'évolution du réseau de fissures radiales tend vers la diminution de leur nombre et l'uniformisation du motif à mesure que le cône perce la feuille, ce qui est également le cas avec les plaques fragiles. Voilà donc un phénomène de brisure qui tend à atténuer fortement l'influence des défauts du matériau sur la distribution finale des fragments. La suite logique de ces travaux consisterait en l'étude de la version dynamique du problème.

Dès lors, après avoir écarté l'hypothèse d'une instabilité de flambage induisant la brisure, les travaux réalisés sur la perforation se dégagent comme une nouvelle piste qui pourrait bien mener à la compréhension de la fragmentation en fissures radiales d'une plaque fragile. En effet, nous avons largement souligné les analogies entre les deux phénomènes : faible variation du nombre de fissures avec les différents matériaux testés, diminution du nombre de fissures et uniformisation du motif à mesure qu'on s'éloigne du point d'impact. Ces aspects sont bien documentés grâce aux expériences conduites avec les plaques en verre et en PMMA, qui constitueront, par conséquent, un point de comparaison fiable avec tout modèle théorique futur. En somme, si le mécanisme sous-jacent à la fragmentation en étoile consécutive à un impact sur une plaque fragile n'est toujours pas isolé, les démarches entreprises au travers de cette thèse marquent un progrès significatif vers sa compréhension.

Annexe A

Calcul de l'énergie élastique d'une feuille fragile perforée par un cône

Dans cette annexe, nous effectuons le calcul de l'énergie élastique U_e utilisée dans la partie 4.2. L'énergie élastique totale de la feuille fragile est donnée par l'intégrale :

$$U_e = \int_0^{2\pi} \int_R^{R_p} \frac{1}{2} (\epsilon_r \sigma_r + \epsilon_\theta \sigma_\theta) h r dr d\theta \quad (\text{A.1})$$

En utilisant les relations 5.14, 5.15, 5.18 et 5.19 on obtient pour l'énergie élastique :

$$U_e = \frac{\epsilon_n^2}{1 - \nu^2} \frac{EhR^4}{R_p^2 - R^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_R^{R_p} \left((1 - \nu) \frac{R_p^2}{r^2} + 1 + \nu \right) \left(1 + \frac{R_p^2}{r^2} \right) r dr d\theta \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \int_R^{R_p} \left((\nu - 1) \frac{R_p^2}{r^2} + 1 + \nu \right) \left(1 - \frac{R_p^2}{r^2} \right) r dr d\theta \right\} \quad (\text{A.2})$$

Soient les intégrales I_1 et I_2 définies par

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_R^{R_p} \left((1 - \nu) \frac{R_p^2}{r^2} + 1 + \nu \right) \left(1 + \frac{R_p^2}{r^2} \right) r dr d\theta \quad (\text{A.3})$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_R^{R_p} \left((\nu - 1) \frac{R_p^2}{r^2} + 1 + \nu \right) \left(1 - \frac{R_p^2}{r^2} \right) r dr d\theta \quad (\text{A.4})$$

On obtient alors facilement l'expression suivantes :

$$I_1 = 2\pi(I_3 + I_4 + I_5) \quad (\text{A.5})$$

$$I_2 = 2\pi(I_3 - I_4 + I_5) \quad (\text{A.6})$$

avec les intégrales I_3 , I_4 et I_5 définies de la manière suivante,

$$I_3 = (1 + \nu) \int_R^{R_p} r dr \\ = \frac{1 + \nu}{2} (R_p^2 - R^2) \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= 2R_p^2 \int_R^{R_p} \frac{dr}{r} \\
 &= 2 \ln \left(\frac{R_p}{R} \right) R_p^2 \\
 \\
 I_5 &= (1 - \nu) \int_R^{R_p} \frac{R_p^4}{r^3} dr \\
 &= \frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{(R_p^2 - R^2)R_p^2}{R^2} \right)
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Ce qui aboutit aux expressions suivantes pour I_1 et I_2 :

$$I_1 = \pi(1 + \nu)(R_p^2 - R^2) + 4\pi \ln \left(\frac{R_p}{R} \right) R_p^2 + \pi(1 - \nu) \left(\frac{(R_p^2 - R^2)R_p^2}{R^2} \right) \tag{A.9}$$

$$I_2 = \pi(1 + \nu)(R_p^2 - R^2) - 4\pi \ln \left(\frac{R_p}{R} \right) R_p^2 + \pi(1 - \nu) \left(\frac{(R_p^2 - R^2)R_p^2}{R^2} \right) \tag{A.10}$$

On a alors

$$U_e = \frac{\epsilon_n^2}{1 - \nu^2} \frac{EhR^4}{R_p^2 - R^2} (I_1 + I_2) \tag{A.11}$$

Ce qui donne finalement,

$$U_e = \frac{\pi \epsilon_n^2}{1 - \nu^2} \left((1 - \nu) \frac{R_p^2}{R^2} + 1 + \nu \right) \frac{EhR^4}{R_p^2 - R^2} \tag{A.12}$$

Bibliographie

- [1] Inglis, C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects (London)* **55**, 219–241 (1913).
- [2] Griffith, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* **221**, 163–198 (1921).
- [3] Broberg, K. *Cracks and Fracture* (Academic Press (London), 1999).
- [4] Grady, D. *Fragmentation of Rings and Shells : The Legacy of N.F. Mott* (Springer, 2006).
- [5] Åström, J. A., Linna, R. P., Timonen, J., Møller, P. F. & Oddershede, L. Exponential and power-law mass distributions in brittle fragmentation. *Physical Review E* **70**, 026104 (2004).
- [6] Oddershede, L., Dimon, P. & Bohr, J. Self-organized criticality in fragmenting. *Physical Review Letters* **71**, 3107–3110 (1993).
- [7] Wu, S. Z., Chau, K. T. & Yu, T. X. Crushing and fragmentation of brittle spheres under double impact test. *Powder Technology* **143-144**, 41–55 (2004).
- [8] Wu, S. Z. & Chau, K. T. Dynamic response of an elastic sphere under diametral impacts. *Mechanics of Materials* **38**, 1039–1060 (2006).
- [9] Saint-Venant, M. & Flamant, A. Résistance vive ou dynamique des solides. représentation graphique des lois du choc longitudinal, subi à une des extrémités par une tige ou barre prismatique assujettie à l’extrémité opposée. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* **97**, 127–133 (1883).
- [10] Lindberg, H. E. Impact buckling of a bar. *Journal of Applied Mechanics* **32**, 315–322 (1965).
- [11] Gladden, J. R., Handzy, N. Z., Belmonte, A. & Villermaux, E. Dynamic buckling and fragmentation in brittle rods. *Physical Review Letters* **94**, 035503 (2005).
- [12] Vermorel, R., Vandenberghe, N. & Villermaux, E. Rubber band recoil. *Proceedings of the Royal Society of London A* **463**, 641–658 (2007).
- [13] Vandenberghe, N., Vermorel, R. & Villermaux, E. Fragmentation in brittle rods. APS March Meeting Denver (2007). <http://meetings.aps.org/link/BAPS.2007.MAR.D22.11>.
- [14] Vandenberghe, N. & Villermaux, E. Fragmentation of an elastica. APS March Meeting Pittsburgh (2009). <http://meetings.aps.org/Meeting/MAR09/Event/94533>.
- [15] Corbett, G. G., Reid, S. R. & Johnson, W. Impact loading of plates and shells by free-flying projectiles : A review. *International Journal of Impact Engineering* **18 (2)**, 141–230 (1996).

- [16] Kadono, T. Fragment mass distribution of platelike objects. *Physical Review Letters* **78**, 1444–1447 (1997).
- [17] Bradt, R. C. & Tressler, R. E. *Fractography of Glass* (Plenum Press (New York), 1994).
- [18] Bradt, R. C., Barkey, M. E., Jones, S. E. & Stevenson, M. E. Projectile impact - a major cause for fracture of flat glass. *Journal of Failure Analysis and Prevention* **3**, Number 1, 5–11 (2003).
- [19] Åström, J. & Timonen, J. Fracture of a brittle membrane. *Physical Review Letters* **79**, 3684–3687 (1997).
- [20] El-Raheb, M. Dynamic instability of a disk forced by a pulse of short duration. *International Journal of Solids and Structures* **39**, 2965–2986 (2002).
- [21] Brown, J. R., Chappell, P. J. C., Egglestone, G. T. & Gellert, E. P. A gas-gun facility for material impact studies using low-velocity, low-mass projectiles. *Journal of Physics E : Scientific Instruments* **22**, 771–774 (1989).
- [22] Fowles, G. R. *et al.* Gas gun for impact studies. *Review of Scientific Instruments* **41**, 984 (1970).
- [23] Hutchings, I. M. & Winter, R. E. A simple small-bore laboratory gas-gun. *Journal of Physics E : Scientific Instruments* **8**, 84 (1975).
- [24] Porat, Y. & Gvishi, M. The performance of a short barreled gas gun. *Journal of Physics E : Scientific Instruments* **13**, 504 (1980).
- [25] Graff, K. F. *Wave motion in elastic solids* (Dover Publications, 1975).
- [26] Zener, C. The intrinsic inelasticity of large plates. *Physical Review* **59** (8), 669–673 (1941).
- [27] Bouzid, S., Nyongue, A., Azari, Z., Bouaouadja, N. & Pluvinage, G. Fracture criterion for glass under impact loading. *International Journal of Impact Engineering* **25**, 831–845 (2001).
- [28] Zarzycki, J. Propriétés mécaniques des verres. *Revue de Physique Appliquée* **12**, 789–796 (1977).
- [29] Vermorel, R., Vandenberghe, N. & Villermaux, E. Impacts on thin elastic sheets. *Proceedings of the Royal Society of London A* **465**, 823–842 (2009).
- [30] Géminard, J. C., Bernal, R. & Melo, F. Wrinkle formations in axi-symmetrically stretched membranes. *The European Physical Journal E* **15**, 117–126 (2004).
- [31] Huang, J. *et al.* Capillary wrinkling of floating thin polymer films. *Science* **317**, 650–653 (2007).
- [32] Chopin, J., Vella, D. & Boudaoud, A. The liquid blister test. *Proceedings of the Royal Society of London A* **464**, 2887–2906 (2008).
- [33] Phoenix, S. L. & Porwal, P. K. A new membrane model for the ballistic impact response and v_{50} performance of multi-ply fibrous systems. *International Journal of Solids and Structures* **40**, 6723–6765 (2003).
- [34] Landkof, B. & Goldsmith, W. Petaling of thin metallic plates during penetration by cylindro-conical projectiles. *International Journal of Solids and Structures* **21** : 3, 245 (1985).

- [35] Kaminishi, K., Taneda, M. & Tanaka, S. Crack initiation and extension under penetration of thin metal sheet. *Japan Society of Mechanical Engineers International Journal* **35** : 4 (1992).
- [36] Wierzbicki, T. Petalling of plates under explosive and impact loading. *International Journal of Impact Engineering* **22** (9-10), 935–954 (1999).
- [37] Herrmann, H. J. & Kertész, J. Stability analysis of crack propagation. *Physica A* **178**, 227–235 (1991).
- [38] Audoly, B., Reis, P. M. & Roman, B. Cracks in thin sheets : When geometry rules the fracture path. *Physical Review Letters* **95** : 025502 (2005).
- [39] Landau, L. & Lifchitz, E. *Theorie de l'élasticité* (Editions MIR (Moscou), 1967).
- [40] Santucci, S., Måløy, K. J., Toussaint, R. & Schmittbuhl, J. Dynamics and structure of burst during slow interfacial crack front propagation. En cours de préparation pour Physical Review E. http://folk.uio.no/ssantucc/CVtucci-.htm#_Toc154170459.
- [41] Cheshire, E., Rossi, M. & Atkins, T. Perforation of sheets by pyramidal weapons such as arrowheads. *International Journal of Impact Engineering* **35**, 457–470 (2007).
- [42] Cotterel, B. & Rice, J. R. Slightly curved or kinked cracks. *International Journal of Fracture* **16**, 155–169 (1980).
- [43] Leguillon, D. & Murer, S. Crack deflection in a biaxial stress state. *International Journal of Fracture* **150**, 75–90 (2008).
- [44] Adda-Bedia, M. Path prediction of kinked and branched cracks in plane situations. *Physical Review Letters* **93** : 185502 (2004).
- [45] Timoshenko, S. P. & Goodier, J. N. *Theory of Elasticity (Third Edition)* (McGraw - Hill International Editions, 1970).
- [46] Goldstein, R. V. & Salganik, R. L. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks. *International Journal of Fracture* **10**, 507–527 (1974).
- [47] Bouasse, H. & Carrière, Z. Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 2e série* **5**, 257–283 (1903).
- [48] Euler, L. Addidendum i de curvis elasticis, methodus inveniendi lineas curvas maximi minimi proprietate gaudentes. *Opera Omnia* **I**, 231–297 (1744).
- [49] Kolsky, H. An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading. *Proceedings of the Physical Society of London B* **62**, 676–700 (1949).
- [50] Lamb, H. *Hydrodynamics* (Cambridge University Press, 1932).
- [51] Lepik, U. Dynamic buckling of elastic-plastic beams including effects of axial stress waves. *International Journal of Impact Engineering* **25**, 537–552 (2001).
- [52] Love, A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th edn* (Dover Publications, 1944).
- [53] Mason, P. Finite elastic wave propagation in rubber. *Proceedings of the Royal Society of London A* **272**, 315–330 (1963).
- [54] Mullins, L. Effect of stretching on the properties of rubber. *Journal of Rubber Research* **16**, 275–289 (1947).

- [55] Stokes, G. G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **IX**, 8 sec 52 (1850).
- [56] Vaughn, D. G. & Hutchinson, J. W. Bucklewaves. *European Journal of Mechanics - A/Solids* **25**, 1–12 (2006).
- [57] Backman, M. E. & Goldsmith, W. The mechanics of penetration of projectiles into targets. *International Journal of Engineering Science* **16**, 1–99 (1978).
- [58] Begley, M. R. & Mackin, T. J. Spherical indentation of freestanding circular thin films in the membrane regime. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **52**, 2005–20023 (2004).
- [59] Cerda, E., Mahadevan, L. & Pasini, J. M. The elements of draping. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **101**, 1806–1810 (2004).
- [60] Coman, C. D. & Haughton, D. M. Localized wrinkling instabilities in radially stretched membranes. *Acta Mechanica* **185**, 179–200 (2006).
- [61] Rayleigh, J. W. S. *The theory of sound* (Dover Publications, 1894).
- [62] Senior, B. W. Flange wrinkling in deep-drawing operations. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* **4**, 235–246 (1956).
- [63] Timoshenko, S. & Woinowsky-Krieger, S. *Theory of plates and shells* (McGraw-Hill, 1959).

Titre**Elasticité et fragmentation solide**

Résumé

Les travaux présentés s'intéressent à plusieurs phénomènes de fragmentation d'objets fragiles, lesquels présentent des motifs de rupture réguliers, suggérant la grande influence de la réponse élastique du matériau sur la distribution finale des fragments. Ainsi nous nous intéressons en premier lieu à l'instabilité de flambage dynamique consécutive à un impact axial sur une barre. Cette instabilité, également observée lors du repliement d'un élastique, sélectionne une longueur d'onde bien définie. Dans le cas d'un matériau fragile, si localement les contraintes occasionnées sont supérieures à la contrainte de rupture, la barre se brise avec une taille caractéristique de ses fragments corrélée à la longueur d'onde de flambage. Par ailleurs, nous étudions le réseau de fissures radiales généré par un impact sur une plaque fragile. La répartition des fissures est régulière et nous observons une sélection de leur nombre en fonction de la vitesse d'impact. Afin de mieux comprendre le mécanisme de sélection, nous avons recours à des systèmes expérimentaux plus simples, comme des membranes élastiques ou fragiles, qui présentent une phénoménologie analogue. Ainsi, nous documentons l'instabilité de flambage dynamique survenant après un impact sur une membrane élastique, de même que nous abordons le problème de la perforation statique d'une feuille fragile et sa fragmentation en pétales.

Title**Elasticity and solid fragmentation**

Abstract

The present work investigates several solid fragmentation phenomena involving regular failure patterns, which suggests that the elastic response of the material directly affects the fragments size distribution. As a first example, we study the dynamic buckling instability consecutive to an axial impact on a rod, or occurring during the recoil of a stretched rubber band. This instability provokes the bending of the rod with a well defined wavelength. Thus, in the case of brittle materials, if the stress rises locally above a critical value, the rod breaks with a typical fragment size which relates to the buckled wavelength. In addition, we investigate the radial cracks patterns subsequent to an impact on a brittle plate. These breaking patterns feature regular spacing between the cracks, which number depends on the impactor incident velocity. In order to better understand the selection mechanism, we focus on simpler experimental models, such as elastic and brittle membranes, which involve a similar phenomenology. Therefore, we study the dynamic buckling instability consecutive to an impact on a thin elastic sheet, as well as the static perforation and *petalling* of a brittle film.

Addr : IRPHE - UMR 6594, Technopôle de Château-Gombert 49, rue Joliot Curie - B.P. 146 13384 Marseille Cedex 13, France